

文章编号:1006-1355(2023)01-0086-07

高速电梯垂直方向动力学建模与计算研究

侯璋天¹, 张洪², 郑豪², 田中旭¹, 李奇彦¹

(1. 上海海洋大学 工程学院, 上海 201306; 2. 日立电梯(上海)有限公司, 上海 201700)

摘要:为研究高速电梯振动问题,基于理论建模结合数值计算完成高速电梯垂直方向振动分析。基于子结构法建立适应性强的系统动力学模型,采用拉格朗日方程、牛顿定律等处理曳引轮、补偿轮、轿厢等构件的动力学模型,并建立单元数可变的钢丝绳动力学模型;在数值计算方面,采用乔里斯基分解结合雅克比迭代方法计算自然频率和振型;采用ADAMS动力学仿真与实验测试相结合的方式对模型和数值计算进行验证;探讨载重、轿厢高度、绳头弹簧刚度等参数对振动特性的影响规律。研究成果可为高速电梯设计提供一定借鉴。

关键词:振动与波;高速电梯;动力学模型;子结构法;模态分析

中图分类号:TK113.1

文献标志码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2023.01.015

Vertical Direction Dynamic Modeling and Calculation of High-speed Elevators

HOU Zhangtian¹, ZHANG Hong², ZHENG Hao²,
TIAN Zhongxu¹, LI Qiyan¹

(College of Engineering Science Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China;
2. Hitachi Elevator (Shanghai) Co., Ltd., Shanghai 201700, China)

Abstract: The vertical vibration of high-speed elevators is analyzed by theoretical modeling and numerical algorithm. A dynamic model of the elevator with strong adaptability is established based on substructure method. Lagrange equation and Newton's law are used to establish the dynamic models of traction wheel, compensation wheel, cage and other components. Then, the wire rope dynamic model with variable number of elements is established. In terms of numerical calculation, the natural frequency and mode shapes are calculated by using the Cholesky decomposition combined with the Jacobi iteration method. The model and numerical calculations are verified by dynamic simulation of ADAMS code and experimental tests. The influences of the load, the height of the carriage, rope spring stiffness and some other parameters on the vibration performances are discussed. The research results may provide a reference for different high-speed elevator designs.

Key words: vibration and wave; high-speed elevator; dynamic model; substructure technique; modal analysis

随着高层、超高层建筑越来越多,对电梯的研究倾向于提高电梯的行程及速度。电梯速度不断提高,会引发各种安全隐患。其中,高速电梯的振动是影响舒适性和安全性最重要的因素^[1],如何避免或降低由电梯振动带来的不良影响成为研究的焦点。

高速电梯绳索长度增加,会使高速电梯系统的固有频率降低,容易与外部激励产生共振^[2]。高速电梯各种激励频率随电梯速度的增加而增加,振动问

题更加突出,因为系统频率密集,更容易产生共振,另外速度越大,振动冲击越强,振动的响应也就越大,会影响高速电梯的安全性与舒适性。为研究高速电梯的振动情况,需建立准确可靠的动力学模型,求解出电梯的固有频率及动力学响应,探究参数改变对固有频率的影响,以便于把握高速电梯振动性质和研究振动控制方案^[3]。

针对高速电梯垂直方向的动力学建模问题,国内外学者做了诸多研究。目前,已有关于基于电梯整体模型建立多自由度动力学模型的研究,在模型中考虑了包括钢丝绳及张紧系统等在内的电梯各环节的质量、刚度,并根据模态实验获得的固有频率和对应的阻尼比确定阻尼系数^[4-6]。还有针对电梯某一构件的研究^[7-9],比如,针对电梯轿厢,建立多自由

收稿日期:2022-01-10

作者简介:侯璋天(1997-),男,河南省洛阳市人,硕士研究生,专业方向为机械振动。

E-mail: zthou1997@163.com

通信作者:田中旭(1971-),男,吉林省通化市人,副教授,专业方向为机械振动及机械动力学。

度模型,通过开发主动控制系统来减弱振动的影响。

本文以某高速电梯为例,基于子结构方法将电梯各个构件进行离散,依据牛顿定律以及拉格朗日方程,采用先单元分析再单元综合的形式建立动力学模型。在此基础上研究有效的计算方法,并探讨电梯振动性质以及影响振动的关键参数。

1 高速电梯动力学模型建立

高速电梯系统中,影响垂直方向振动性质的构件有:曳引机组、钢丝绳、轿厢轿架、对重系统、张紧系统;主要存在以下弹性元件:曳引机组的双层隔振橡胶、轿厢底部的减振橡胶、轿厢侧及对重侧钢丝绳的绳头弹簧等。考虑上述因素,利用子结构法,对各个对振动有贡献的构件进行动力学建模。在建模和求解时假设高速电梯系统水平方向振动与垂直方向振动不耦合,下文所提及的各个部件刚度均与电梯垂直方向相关。

1.1 电梯主要构件动力学模型

将高速电梯曳引系统的双层隔振橡胶简化为弹簧阻尼系统,对曳引轮、导向轮、电机的质量求算术和,得到曳引系统的等效质量 m_2 。采用子结构分析方法,选取动力学模型连接关系中必须选取的节点作为自由度,此模型中选取了曳引轮轿厢侧钢丝绳、对重侧钢丝绳连接点以及承重梁与隔振橡胶的连接点作为节点,从而确定模型自由度为3。综上得到曳引系统的3自由度动力学模型,如图1所示,该系统有双层隔振橡胶,具有良好的隔振效果。

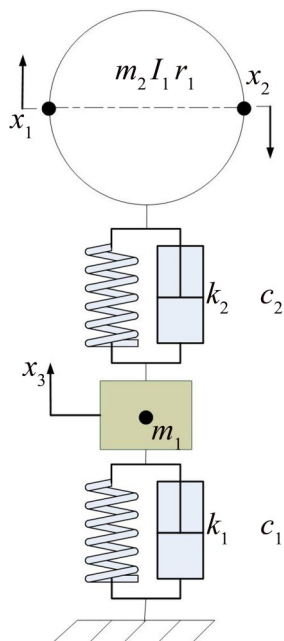


图1 曳引系统模型

设曳引轮中心位移为 x (与轿厢同侧为正),则有:

$$x = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad (1)$$

根据拉格朗日方程建立动力学方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q \quad (2)$$

式中: x_i 为系统广义坐标即自由度, Q 为系统广义力, T 为系统动能。

对于电梯系统,由于存在减振环节,阻尼器的存在使系统存在能量耗散,所以系统为非保守系统, Q 由广义有势力、广义线性阻尼力和广义激振力组成,其中:

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} + F_i \quad (3)$$

将式(2)、式(3)联立,得到:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} = F_i \quad (4)$$

系统的弹性势能为:

$$V_I = \frac{1}{2} k_1 x_3^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{x_1 - x_2}{2} - x_3 \right)^2 \quad (5)$$

系统的阻尼耗散能:

$$W_I = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right)^2 \quad (6)$$

系统的动能:

$$T_I = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2r_1} \right)^2 \quad (7)$$

将系统弹性势能 V_I 、系统阻尼耗散能 W_I 与系统动能 T_I 代入式(4),整理可得到如下模型:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (8)$$

其中,子系统质量阵为:

$$[\mathbf{M}_{e1}] = \frac{1}{4} \left(m_2 + \frac{I_1}{r_1^2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \left(-m_2 + \frac{I_1}{r_1^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

子系统阻尼阵为:

$$[\mathbf{C}_{e1}] = \frac{1}{4} c_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

子系统刚度阵为:

$$[\mathbf{K}_{e1}] = \frac{1}{4} k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

图1及式中各符号的物理意义如下:

m_1 、 m_2 分别为架机梁质量和曳引轮、导向轮、电机等效质量; I_1 、 I_2 分别为曳引轮、导向轮等效转动惯量; k_1 、 k_2 、 c_1 、 c_2 分别为上层及底层隔振橡胶刚度、阻尼; x_1 、 x_2 、 x_3 分别为曳引轮左侧钢丝绳位移、曳引轮右侧钢丝绳位移、架机梁位移,轿厢侧以垂直向上为

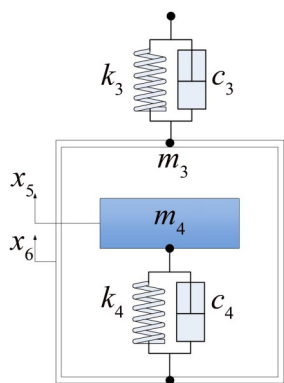


图4 轿厢、轿架模型

1.2 整体模型

采用子结构法将上述模型进行单元综合。各子结构间通过将自由度节点与相邻子结构耦合^[1],使相邻的子结构在节点处共享自由度,根据位移连续性条件进行装配,再根据有限元叠加原理组合各子结构的质量阵、刚度阵及阻尼阵,得到系统的质量阵、刚度阵及阻尼阵如式(18)至式(20)所示, M_e 、 K_e 、 C_e 分别为装配后系统的质量阵、刚度阵、阻尼阵。求解广义特征值问题,进行模态分析,求解部分将在下文介绍。最终得到电梯系统动力学模型如图5所示。

$$M_e = \begin{bmatrix} M_{e1} & & & \\ & M_{e2} & & \\ & & \dots & \\ & & & M_{en} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} & & & \\ & K_{e2} & & \\ & & \dots & \\ & & & K_{en} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C_{e1} & & & \\ & C_{e2} & & \\ & & \dots & \\ & & & C_{en} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中: $m_i(i=1:6)$ 为架机梁质量、曳引装置等效质量、轿架质量、轿厢质量、对重质量以及补偿轮质量; $k_i(i=1:5)$ 为各质量对应的刚度; $c_i(i=1:5)$ 为各质量对应的阻尼; m_{h1} 、 m_{h2} 与 $m_{ci}(i=1:2)$ 为轿厢侧以及对重侧曳引钢丝绳质量、轿厢侧以及对重侧补偿绳质量; k_{hi} 、 k_{ci} 、 c_{hi} 、 $c_{ci}(i=1:2)$ 为各段钢丝绳对应的刚度以及阻尼; r_1 、 r_2 分别为曳引轮、补偿轮的半径; I_1 、 I_3 分别为曳引轮的等效转动惯量、补偿轮的等效转动惯量。

2 数值计算方法研究与模型验证

为了更有效地研究高速电梯振动性质,避免电梯产生共振,需对动力学模型进行求解。由于模型复杂,需研究模型求解的数值计算方法,并对结果进行验证。

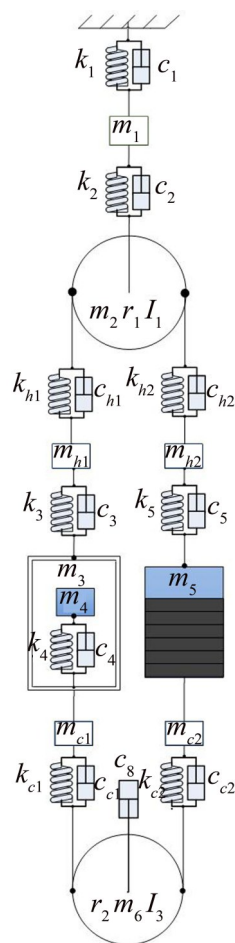


图5 高速电梯系统动力学模型

2.1 数值计算方法研究

将上文数学模型进行单元综合,得到高速电梯系统的自由振动方程:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (21)$$

对于无阻尼情况,忽略阻尼项 C ,得:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (22)$$

动力学模型中,质量阵 M 为正定矩阵,可采用乔里斯基分解与雅克比迭代的方法求解电梯系统的固有频率及振型,计算流程图如图6所示。

此方法将模态分析问题转化为矩阵的特征值问题,矩阵 N 的特征值是系统固有圆频率 ω 的平方。这里选择使用雅克比迭代的方法求解出对称矩阵 N 的所有特征值与特征向量。对于高速电梯系统,使用雅克比迭代的方法求解固有频率优点明显。由于系统相对简单,在保证计算简便、准确的同时,也能保证收敛速度较快。当系统的阶次为 n 时,系统存在 n 个不同的模态,也对应 n 个不同的固有角频率以及振型向量。

由于电梯系统的刚度阵与质量阵会随电梯的高度不断变化,为了研究其振动特性,需要借助计算机编程对其固有频率进行求解。

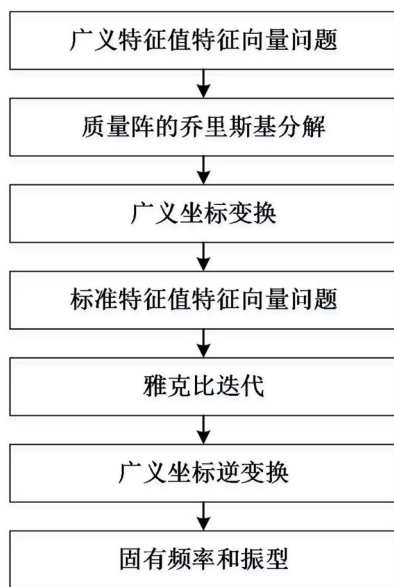


图6 固有频率计算流程图

2.2 动力学模型及算法验证

为了保证所建立的动力学模型以及求解算法的准确性,需要进行相应的验证,分析固有频率是验证理论模型及算法是否合理的一种有效方法。

本文采用 ADAMS 多体动力学软件与试验结合的方法进行验证。在 ADAMS 中建立电梯模型,通过模拟仿真求解模态,验证动力学模型^[10]。仿真过程中,主要对上述通过数值计算得到的固有频率以及振型进行验证,仿真过程中可以忽略阻尼的影响。仿真过程中对模型进行简化,将钢丝绳简化为质量-弹簧系统,将电梯的其他部件简化为质量块,忽略外部激励,从而验证自由振动时电梯的固有频率。其主要步骤及要点如下:

(1) 定义轿厢侧与对重侧钢丝绳的离散单元数,本次验证中选取单元数为5;

(2) 定义电梯所在高度,从而确定电梯两侧钢丝绳长度,根据离散单元数计算出每个钢丝绳单元的质量及刚度;

(3) 确定载重量,定义轿厢总质量。

高速电梯系统各参数如表1所示。计算与仿真时定义电梯的载重为800 kg,高度为80 m。此工况在测试指标中比较受关注,具有代表性。

本文也采用试验的方法对模型和算法进行验证。使用 AHAI6032 型电梯专用振动分析仪在电梯试验塔进行电梯振动信号采集,通过三轴加速度传感器采集数据,再将数据传入到设备终端进行数据分析。采用共振法对获取到的竖直方向加速度信号进行快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT),得到信号频谱图,提取出各个峰值,即为高速电梯系统的固有频率,具体值如表2第3列所示。

表1 高速电梯主要参数

电梯参数	单位	标准值
架机梁质量 m_1	kg	198.45
曳引装置等效质量 m_2	kg	2 835
轿架质量 m_3	kg	2 282
轿厢质量 m_4	kg	1 805
对重质量 m_5	kg	4 887.4
补偿系统质量 m_6	kg	1260
曳引轮转动惯量 I_1	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	50
补偿轮转动惯量 I_2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	51.5
曳引装置上层隔振橡胶刚度 k_1	N/m	$1.6 \times 10^7 \times 4$
曳引装置下层隔振橡胶刚度 k_2	N/m	$2.7 \times 10^7 \times 4$
轿厢侧绳头弹簧刚度 k_3	N/m	$2.72 \times 10^5 \times 15$
轿底防振橡胶刚度 k_5	N/m	$9.8 \times 10^5 \times 6$
对重侧绳头弹簧刚度 k_5	N/m	$2.72 \times 10^5 \times 15$
曳引绳根数 n_1	根	15
曳引绳线密度 ρ_1	kg/m	0.494
曳引绳横截面积 A_1	m^2	1.2×10^{-5}
曳引绳杨氏模量 E_1	N/m ²	1.176×10^{11}
补偿绳根数 n_2	根	7
补偿绳线密度 ρ_2	kg/m	0.878
补偿绳杨氏模量 E_2	N/m ²	9.8×10^{10}
补偿绳横截面积 A_1	m^2	1.6×10^{-5}

表2 固有频率对比表/Hz

ADAMS 仿真	数值计算	试验分析
2.896	2.681 8	2.335
3.467	3.721	3.318
11.753	10.828	10.88
12.823	12.725	12.35
15.092	15.329	15.12
18.857	18.078	20.18
19.456	19.593	19.332
22.93	21.398	20.528
30.32	31.065	30.950

通过 ADAMS 仿真计算,得到电梯的部分固有频率如表2第1列所示,本文选取低阶次固有频率,由于建模过程中钢丝绳离散单元的不同而存在不确定因素,中间阶次结果可能会存在差异。运用前文中模态分析的数值算法求解得到电梯固有频率,如表2第2列所示。

将 ADAMS 仿真结果、数值计算结果与试验分析结果做对比。3种结果在趋势上和量级上都基本一致,仅存在较小的误差,仿真和计算数据与试验分析数据相比,每阶误差均不超过10%。另外,与对电梯其他工况计算、仿真得出的数据进行对比,结论与上述算例一致,从而验证了动力学模型和算法的合理性。

3 主要参数对系统振动特性的影响

在电梯动力学模型中,轿厢侧以及对重侧的钢丝绳重量会随着轿厢提升高度的变化而变化,从而模型的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵均会发生改变;轿厢的载重也非固定值,随着运载情况的改变,轿厢质量也会在额定载重范围内浮动;另外高速电梯系统有许多减振环节,用来弱化各个部件振动对整体系统的影响,改变系统固有频率以避免共振、减小振动。根据机械振动理论,构件刚度的改变也会使系统的固有频率发生变化。改变减振橡胶以及钢丝绳这些弹性环节的刚度,可能会使系统振动特性发生变化。但在电梯系统的实际设计中,各个构件都是根据复杂的工况设计的,不能任意对其改变,比如钢丝绳起着承载重量的作用。下文将针对某些动态参数,如轿厢载重的变化、电梯高度的变化以及绳头弹簧刚度的变化对系统固有频率的影响进行研究。

3.1 轿厢载重

利用上文中的模型以及计算方法,分别计算高速电梯空载、半载及满载情况下各阶次固有频率,如图7所示。通过对比,可从图中可以得出以下结论:电梯的某些低阶次固有频率会受电梯载重影响,尤其10 Hz附近的固有频率受载重影响较大。当高速电梯存在10 Hz左右的外部激励时,会受电梯载重的影响从而产生共振。10阶以上的固有频率几乎不受电梯载重的影响。

3.2 电梯高度

由于电梯高度的变化,曳引绳和补偿绳在轿厢侧和对重侧的质量和刚度均会发生变化,需对轿厢在不同位置的固有频率进行分析。通过计算,得到在空载下,电梯位于不同高度时的各阶固有频率,如图8所示。

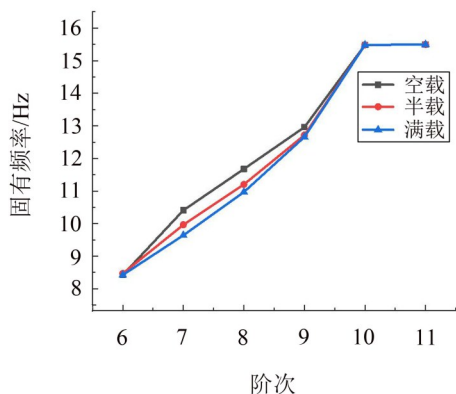


图7 电梯固有频率随载重的变化图

由图(8)可得以下结论:

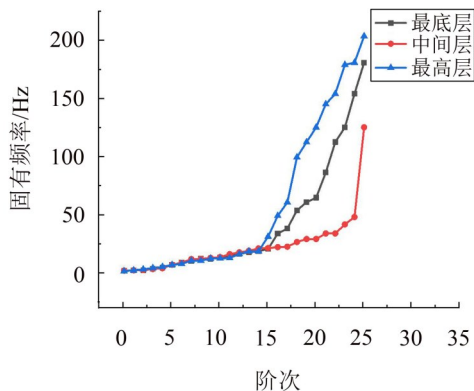


图8 不同高度处固有频率对比图

高速电梯低阶固有频率随高度的变化较小,即25 Hz以下的固有频率变化较小,高阶固有频率随高度的变化较大,尤其在15阶次以上频率变化极其明显。轿厢位于最底层与最顶层时,电梯系统的固有频率基本关于中间层呈对称趋势变化,电梯位于中间层时,固有频率较小,随着电梯的上升或下降,高阶次固有频率均有不同程度的增大。

3.3 绳头弹簧刚度

改变高速电梯系统某些弹性元件的刚度也会影响电梯系统的固有频率。但改变高速电梯弹性元件的刚度,需要考虑其可行性问题。由于电梯在前期设计中,为了保证整个电梯系统的安全性,某些弹性环节在选用后无法做出变更,比如曳引机组的双层隔振橡胶及钢丝绳的刚度。鉴于绳头弹簧的可调节性,可对其刚度做出变更,研究其刚度对电梯系统固有频率的影响。

使用2.2小节中电梯的数据,分别取绳头弹簧的刚度为300 N/mm和150 N/mm,再取电梯位于最底层、中间层以及最高层的工况进行计算。通过计算发现,当电梯位于不同高度时,绳头弹簧刚度改变对低阶固有频率的影响较小,对高阶固有频率的影响较大,随着绳头弹簧刚度增大,各阶频率都不同程度增大。绳头弹簧刚度减半后,高速电梯系统16~25阶次固有频率的变化如图9所示。

结果显示,当高速电梯的高阶次固有频率与外部激励频率相近时,可以通过改变绳头弹簧的刚度,进而改变电梯系统的固有频率,能有效地避开共振频率。另外计算了在不同载重情况下,绳头弹簧刚度改变对系统固有频率的影响,得出的结果与本算例相似。

4 结语

本文以某高速电梯为例,建立了一种高速电梯动力学模型,通过仿真分析和试验结合的方法验证了模型的准确性,并对电梯系统振动特性进行了研

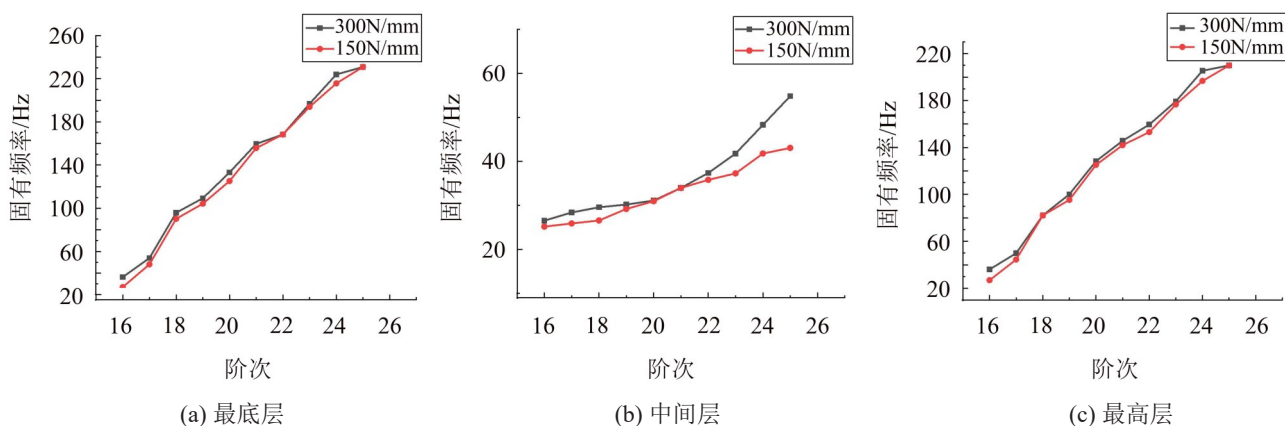


图9 绳头弹簧刚度对固有频率影响

究。本文所完成工作和结论如下：

(1) 基于子结构方法,依据牛顿定律以及拉格朗日方程,建立了一种有效的高速电梯动力学模型；

(2) 采用乔里斯基分解、雅各比迭代对高速电梯动力学模型的模态进行求解,并结合ADAMS模拟仿真与试验数据分析,验证了模型及数值计算方法的可行性；

(3) 利用本文所建的高速电梯动力学模型,分析了轿厢载重、电梯高度和绳头弹簧刚度改变对电梯系统振动特性的影响,其中轿厢载重改变对高速电梯某些低阶次固有频率会产生影响；电梯高度改变对高阶次固有频率会产生较大影响；绳头弹簧刚度改变会对高阶次频率产生影响,随着绳头弹簧刚度的增大,固有频率升高。

综上,本文研究结果可为高速电梯系统的设计、开发和改进提供理论依据。

参考文献：

- [1] 宋丹龙,白洋洋,张向阳,等. 电梯滚动导靴横向隔振性能分析与优化[J]. 机械设计,2021,38(1):34-41.
- [2] YANG D H, KIM K Y, KWAK M K, et al. Dynamic modeling and experiments on the coupled vibrations of building and elevator ropes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 390: 164-191.
- [3] 王艳军,任立刚,于杰. 电梯系统动态固有频率分析[J]. 机械,2010,37(1):35-36.
- [4] 吴慧. 高速曳引电梯的动态特性研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2013.
- [5] 卢明阳. 中高速曳引电梯的振动特性研究[D]. 天津:天津大学,2017.
- [6] 马幸福,陈炳炎. 超高速电梯系统动态仿真分析[J]. 图学学报,2015,36(3):397-401.
- [7] NOGUCHI N, ARAKAWA A, MIYATA K, et al. Study on active vibration control for high-speed elevators[J]. Journal of System Design and Dynamics, 2011, 5(1): 164-179.
- [8] NAKANO K, HAYASHI R, SUDA Y, et al. Active vibration control of an elevator car using two rotary actuators[J]. Journal of System Design and Dynamics, 2011, 5(1): 155-163.
- [9] GUO Y B, ZHANG D K, CHEN K, et al. Longitudinal dynamic characteristics of steel wire rope in a friction hoisting system and its coupling effect with friction transmission[J]. Tribology International, 2018, 119: 731-743.
- [10] 梁颖,李亚东,席建普. 快刀伺服装置动力学建模与仿真分析[J]. 机床与液压,2020,48(14):146-151.
- [11] 马洪亮,贾海涛,刘伟,等. 超单元应用中的关键问题研究[J]. 计算机仿真,2009,26(5):48-51.

(上接第85页)

- [3] E J Q, ZHANG B, DONG J D, et al. Dynamics simulation and analysis on new wind power yaw reducer[J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2011, 42(8): 2324-2331.
- [4] 陶磊. 风力发电新型偏航驱动器设计与研究[D]. 大连:大连理工大学,2010.
- [5] 张俊,宋铁民,张策,等. NGW型直齿行星传动自由振动分析[J]. 天津大学学报,2010,43(1):90-94.
- [6] 宋大风,高福旺,曾小华,等. 基于虚拟样机模型行星混动系统受迫振动响应分析[J]. 吉林大学学报(工学版), 2020,50(6):1974-1982.
- [7] 黄孝慈. 基于SIMPACK的多级齿轮传动机构动力学特性分析[J]. 机械传动, 2014,38(9):148-150+177.
- [8] LI Z, ZHOU Y. Research on gearbox dynamic design methodology based on modal optimization[J]. Journal of Vibroengineering, 2020, 22(1): 156-169.