

文章编号:1006-1355(2009)05-0047-03

用无偏估计方法计算简支梁的频响函数

滑广军¹, 吴运新²

(1. 湖南工业大学, 湖南株洲 412008; 2. 中南大学, 长沙 410083)

摘要: 利用不相关信号的互功率谱多次平均趋于零的性质, 推导出多输入多输出频响函数无偏估计算法, 用 MATLAB 语言编制了该无偏估计算法的程序。使用动态信号测试系统进行了简支梁的多点激励和多点响应的振动测试, 并利用 MATLAB 程序对实测信号进行了计算, 得到了测试对象的频响函数。利用有限元方法计算测试对象的频响函数, 对多输入多输出频响函数无偏估计算法进行了验证。

关键词: 振动与波; 模态分析; 频响函数; 功率谱

中图分类号: TB122; O241.82 **文献标识码:** A

Using Unbiased Estimation Method to Calculate Frequency Response Functions of Simply Supported Beams

HUA Guang-jun¹, WU Yun-xin²

(1. University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China;

2. Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A multi-input and multi-output unbiased frequency response function (MMUFRF) estimation is put forward based on the feature that the mean of the incorrelate signal CSD (Cross Spectral Density) tends to zero. The proposed method is realized by MATLAB programming. Two-input and four-output test is carried on using the dynamic signal test systems and its MMUFRF is acquired by MATLAB program. Meanwhile, numerical simulation of the frequency response functions is made by means of finite element method. The simulation results show that the proposed MMUFRF can correctly estimate the frequency response functions of real structures.

Key words: vibration and wave; mode analysis; frequency response function; PSD

频响函数的准确估计是模态识别、响应计算、动力修改等得以顺利实现的前提条件^[1]。测试时, 无论采用多么完善的测试方法和多么精密的测试仪器, 都不可避免地会产生测量误差(噪声)。测量误差中的系统误差、渐变误差和粗大误差可通过对测试仪器的校正、修正及正确测量避免, 随机误差由许多偶然的不可预测的因素引起, 因此一般将测量误差当作随机误差, 每次测量的输入输出信号中

的测量误差之间以及测量误差与系统的真实输入输出信号之间都是不相关的^[1-3]。目前最常使用的频响函数估计方法有 H_1 和 H_2 两种估计方法, 这两种方法都存在一定的偏差, 引起偏差的原因是由于计算时没能消除输入或输出信号噪声自功率谱成分的影响^[4,5]。基于不相关信号的互功率谱多次平均趋于零的性质, 参考文献[4]提出频响函数无偏估计方法, 本文利用该算法对某简支梁进行了多输入多输出频响函数无偏估计。

1 多输入多输出频响函数无偏估计公式的推导

单输入单输出频响函数估计方法简单易行, 手段经济, 应用广泛, 常用于小型的、结构简单的构

收稿日期: 2009-01-17

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(编号:59835170)

作者简介: 滑广军, 1975.5, 男, 湖南工业大学教师, 河南长垣人, 工学硕士, 工程师。主要从事: 测试与故障诊断技术, 结构动力学, 运输包装技术。

E-mail: hgj757@yahoo.com.cn

件^[7]。多数情况下,结构常常因为过于巨大和笨重,采用单点激振时不能够提供足够的能量,同时还存在激振点分布不尽合理和激振点与模态结点重合的问题,使得有的模态利用单点激振的方法激不起来,而且容易造成非线性^[8]。下面将 H_n 估计拓展到多输入多输出情况,推导出多输入多输出无偏估计公式。

以图 1 两输入三输出系统为例, F_1 和 F_2 是结构所受的实际激振力,与其所对应的实测输入信号为 Z_1 和 Z_2 ,测量噪声为 M_1 、 M_2 ; X_1 、 X_2 、 X_3 是系统的真实响应,与其对应的实测响应信号为 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 ,测量噪声为 N_1 、 N_2 、 N_3 。若共进行了 n 次测试,每次测试的输入输出噪声之间以及与输入输出信号之间不相关。则对 i 次测试有

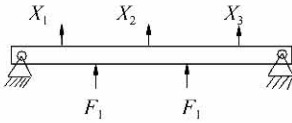


图 1 两输入三输出系统
Fig. 1 Two-input Three-output system

$$[Y] = \begin{bmatrix} \overbrace{Y_{11} \cdots Y_{11}}^{n-1} & \overbrace{Y_{12} \cdots Y_{12}}^{n-2} & \overbrace{Y_{1(n-1)}}^1 \\ \overbrace{Y_{21} \cdots Y_{21}}^{n-1} & \overbrace{Y_{22} \cdots Y_{22}}^{n-2} & \overbrace{Y_{2(n-1)}}^1 \\ \overbrace{Y_{31} \cdots Y_{31}}^{n-1} & \overbrace{Y_{32} \cdots Y_{32}}^{n-2} & \overbrace{Y_{3(n-1)}}^1 \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \overbrace{N_{11} \cdots N_{11}}^{n-1} & \overbrace{N_{12} \cdots N_{12}}^{n-2} & \overbrace{N_{1(n-1)}}^1 \\ \overbrace{N_{21} \cdots N_{21}}^{n-1} & \overbrace{N_{22} \cdots N_{22}}^{n-2} & \overbrace{N_{2(n-1)}}^1 \\ \overbrace{N_{31} \cdots N_{31}}^{n-1} & \overbrace{N_{32} \cdots N_{32}}^{n-2} & \overbrace{N_{3(n-1)}}^1 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \overbrace{Z_{11} \cdots Z_{11}}^{n-1} & \overbrace{Z_{12} \cdots Z_{12}}^{n-2} & \overbrace{Z_{1(n-1)}}^1 \\ \overbrace{Z_{21} \cdots Z_{21}}^{n-1} & \overbrace{Z_{22} \cdots Z_{22}}^{n-2} & \overbrace{Z_{2(n-1)}}^1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \overbrace{M_{11} \cdots M_{11}}^{n-1} & \overbrace{M_{12} \cdots M_{12}}^{n-2} & \overbrace{M_{1(n-1)}}^1 \\ \overbrace{M_{21} \cdots M_{21}}^{n-1} & \overbrace{M_{22} \cdots M_{22}}^{n-2} & \overbrace{M_{2(n-1)}}^1 \end{bmatrix}$$

$$[NZ] = \begin{bmatrix} \overbrace{Z_{12} \cdots Z_{1n}}^{n-1} & \overbrace{Z_{13} \cdots Z_{1n}}^{n-2} & \overbrace{Z_{1n}}^1 \\ \overbrace{Z_{22} \cdots Z_{2n}}^{n-1} & \overbrace{Z_{23} \cdots Z_{2n}}^{n-2} & \overbrace{Z_{2n}}^1 \end{bmatrix}$$

$[NZ]^*$ 是 $[NZ]$ 的共轭转置, 则有

$$[Y][NZ]^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{1i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{1i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{2i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{2i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{3i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Y_{3i} \overline{Z_{2j}} \end{bmatrix}$$

$$[N][NZ]^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{1i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{1i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{2i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{2i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{3i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n N_{3i} \overline{Z_{2j}} \end{bmatrix}$$

$$[Z][NZ]^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Z_{1i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Z_{1i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Z_{2i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Z_{2i} \overline{Z_{2j}} \end{bmatrix}$$

$$[M][NZ]^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_{1i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_{1i} \overline{Z_{2j}} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_{2i} \overline{Z_{1j}} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_{2i} \overline{Z_{2j}} \end{bmatrix}$$

将上述四式带入式(2),取式中各项数学期望并除以测试信号采样时间 T 乘以 2 可得

$$\begin{bmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \\ Y_{3i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \\ N_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Z_{1i} \\ Z_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \right\} \quad (1)$$

在上式中,若 i 从 1 取到 $n-1$,对每个 i 值,将方程两边分别右乘 $\begin{bmatrix} Z_{1j} & \overline{Z_{2j}} \end{bmatrix} (j=i+1, i+2, \cdots, n)$,则共可得到 $n * (n-1)/2$ 个等式,合并这 $n * (n-1)/2$ 个等式有

$$\begin{aligned} [H]_{3 \times \frac{n(n-1)}{2}} [NZ]_{\frac{n(n-1)}{2} \times 2}^* - [N]_{3 \times \frac{n(n-1)}{2}} [NZ]_{\frac{n(n-1)}{2} \times 2}^* = \\ [H]_{3 \times 2} \left([Z]_{2 \times \frac{n(n-1)}{2}} [NZ]_{\frac{n(n-1)}{2} \times 2}^* - \right. \\ \left. [M]_{2 \times \frac{n(n-1)}{2}} [NZ]_{\frac{n(n-1)}{2} \times 2}^* \right) \quad (2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{bmatrix} G_{Y1Z1} & G_{Y1Z2} \\ G_{Y2Z1} & G_{Y2Z2} \\ G_{Y3Z1} & G_{Y3Z2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{N1Z1} & G_{N1Z2} \\ G_{N2Z1} & G_{N2Z2} \\ G_{N3Z1} & G_{N3Z2} \end{bmatrix} = [H] \left(\begin{bmatrix} G_{Z1Z1} & G_{Z1Z2} \\ G_{Z2Z1} & G_{Z2Z2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{M1Z1} & G_{M1Z2} \\ G_{M2Z1} & G_{M2Z2} \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

由不相关信号的互谱的多次平均趋于零的特性可知

$$[G_{NZ}] = \begin{bmatrix} G_{N1Z1} & G_{N1Z2} \\ G_{N2Z1} & G_{N2Z2} \\ G_{N3Z1} & G_{N3Z2} \end{bmatrix} = 0$$
$$[G_{MZ}] = \begin{bmatrix} G_{M1Z1} & G_{M1Z2} \\ G_{M2Z1} & G_{M2Z2} \end{bmatrix} = 0$$

于是式(3)可简化为

$$\begin{bmatrix} G_{Y1Z1} & G_{Y1Z2} \\ G_{Y2Z1} & G_{Y2Z2} \\ G_{Y3Z1} & G_{Y3Z2} \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} G_{Z1Z1} & G_{Z1Z2} \\ G_{Z2Z1} & G_{Z2Z2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

由(4)可得两输入三输出的频响函数估计式为

$$[H]_{3 \times 2} = [G_{YZ}]_{3 \times 2} [G_{ZZ}]_{2 \times 2}^{-1} \quad (5)$$

同样,上述方法可进一步运用到多点激振多点响应的情况,对 P 点激励 M 点响应的情况有

$$[H]_{M \times P} = [G_{YZ}]_{M \times P} [G_{ZZ}]_{P \times P}^{-1} \quad (6)$$

2 多输入多输出频响函数无偏估计的实现

利用 MATLAB 编制程序实现上述算法,利用图 2 所示测试系统进行两点激振四点响应测试,4 个点均布置加速度传感器测试加速度信号,1 测点和 4 测点还布置激振器和力传感器测试激振力信号。进行了多次测试后,选择了 8 次测试信号,利用无偏估计算法的 MATLAB 程序对简支梁的频响函数进行了计算,计算得到的频响函数图谱见图 3。为了与实验估计结果作比较,利用 ANSYS 建立简支梁的模型,仿真计算的频响函数见图 4。

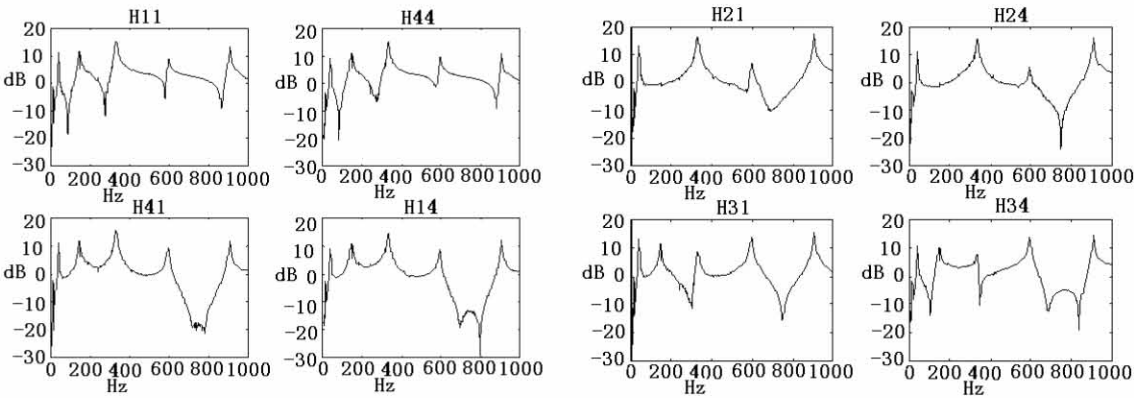


图 3 多输入多输出无偏频响函数计算结果

Fig. 3 Multi-input Multi-output Unbiased Frequency Response Estimating Result

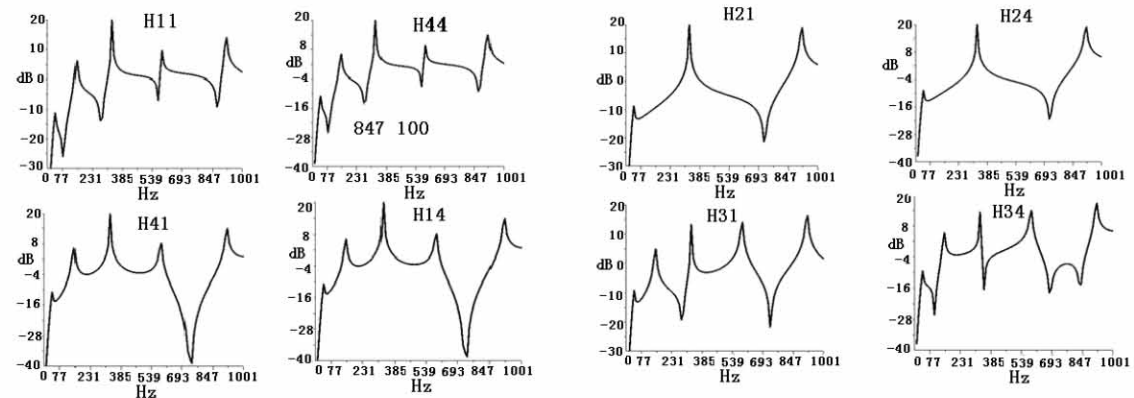


图 4 频响函数仿真结果

Fig. 4 Frequency Response Simulating Result