

文章编号:1006-1355(2021)03-0041-05

含有对称间隙的2自由度振动系统电路仿真

常逢亮, 汪 诤, 胡国静

(兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

摘要:非线性振动系统的数值仿真需要高效的程序和算法来缩短计算时间。以含有对称间隙的2自由度振动系统为研究对象,通过对2自由度线性系统建立传递函数,确定分段线性振动系统的碰撞频率范围,应用数值仿真方法分析,并设计一个与数学模型完全等效的Multisim电子电路模型,通过对比得到完全相同的结果。碰撞频率范围的确定和Multisim电路模型求解非线性方程,实现简单直观,对编程的能力要求低,使计算效率得到提高,为非线性动力学的研究提供了一种参考方法。

关键词:振动与波;非线性振动;传递函数;频率范围;等效电路;仿真

中图分类号: TB123

文献标志码: A

DOI编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2021.03.007

Circuit Simulation of 2-DOF Vibration System with Symmetrical Gap

CHANG Fengliang, WANG Zheng, HU Guojing

(School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Numerical simulation of nonlinear vibration systems needs efficient programs and algorithms to save the computer time consuming. In this paper, the 2-DOF vibration system with a symmetrical gap is studied. The transfer function of the 2-DOF linear system and the corresponding mathematical model are established and the collision frequency range of the piecewise linear vibration systems is determined. An effective Multisim electronic circuit model completely equivalent to the mathematical model is designed. Its computation results are exactly the same as those from the mathematical model. The computation method using the Multisim electric circuit model is simple and intuitive and has low requirements for programming and high computation efficiency. This method provides a reference method for the nonlinear dynamics study.

Key words: vibration and wave; nonlinear oscillations; transfer function; frequency range; equivalent circuit; simulation

非光滑机械系统具有复杂的动力学特性,其非线性特性由分段线性、间隙、干摩擦和时滞等非线性因素引起。对于含有间隙的分段线性机械振动系统,当振子在间隙内运动时为线性系统,而一旦接触到边界时,系统将出现弹性系数的突变,造成强烈的振动和噪声,促使机械零件加速磨损和冲击,引起的随机性载荷严重影响到机械零件的寿命和可靠性^[1-2]。

非线性机械振动的研究是近年来研究的热点,

其以理论研究和数值仿真为手段进行分析。数值仿真采用MATLAB、Fortran或C等编程语言实现,通过长时间的计算获得分岔图和相图。由于数值仿真应用了数值迭代求解微分和积分方程,当精度要求很高时,计算需要花费漫长的时间和巨大的计算量^[3]。为了能够快速完成计算过程,研究者通常对算法进行优化,提高数值计算的效率,或采用昂贵的高性能计算机,以期缩短计算时长。

本论文建立了2自由度线性系统的传递函数,确定了非线性特征发生的频率范围。以Multisim为仿真软件,设计与数学模型完全等效的电子电路模型,该等效电路模型仅由几个TL074CN运算放大器和电阻电容组成,通过仿真得到非线性动力学中相图,不仅极大地降低了对于算法和编程能力的要求,而且电路图具有能直观表达方程式的优点,同时Multisim具有运行时间短和调整参数简便的优点。

收稿日期:2020-07-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11862011)

作者简介:常逢亮(1994-),男,甘肃省白银市人,硕士研究生,主要研究方向为车辆系统动力学。

通信作者:汪诤,男,硕士研究生导师。

E-mail: wangz@mail.lzjtu.cn

1 对称间隙的2自由度振动系统模型

1.1 动力学模型和数值仿真

典型的含有对称间隙2自由度振动系统的动力学模型如图1所示,质量 M_2 通过线性弹簧 K_2 和线性阻尼 C_2 与机架连接,并且在简谐激励 $P_2\sin(\omega t+\tau)$ 的作用下运动。质量 M_1 通过线性弹簧 K_1 和线性阻尼 C_1 与质量 M_2 连接,在距离质量 M_1 零点(M_1 和 M_2 在受力为0的平衡点) B 的两端有线性弹簧 K_0 。设在静态情况下 M_1 和 M_2 所在位置为 x_1 和 x_2 。当质量 M_1 的位移小于对称间隙 B 时, M_1 和 M_2 为一个2自由度线性振动系统,当质量 M_1 的位移大于 $+B$ 或 $-B$ 时,其与线性弹簧 K_0 接触并发生作用,此时 M_1 受到分段线性弹簧力的作用,并且产生非线性运动。

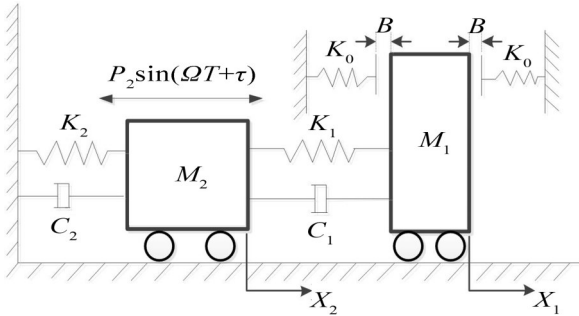


图1 动力学模型

根据动力学理论,可以建立质量 M_1 和 M_2 的物理方程:

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 X_1}{dT^2} + C_1 \frac{d(X_1 - X_2)}{dT} + K_1(X_1 - X_2) + F(X_1) = 0 \\ M_2 \frac{d^2 X_2}{dT^2} + C_2 \frac{dX_2}{dT} + K_2 X_2 - C_1 \frac{d(X_1 - X_2)}{dT} - K_1(X_1 - X_2) = P_2 \sin(\Omega T + \tau) \end{cases} \quad (1)$$

式中非线性部分为

$$F(X_1) = F(X_1) = \begin{cases} K_0(X_1 - B), & X_1 > B \\ 0, & |X_1| \leq B \\ K_0(X_1 + B), & X_1 < -B \end{cases}$$

式(1)为物理方程,其每个因子均含有量纲,为了分析方便,将式(1)转换为无量纲方程,取无量纲化参数为

$$x_i = \frac{K_1 X_i}{P_2}, \delta = \frac{K_1 B}{P_2}, \omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, \zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, \mu_m = \frac{M_2}{M_1}, \mu_{k0} = \frac{K_0}{K_1}, \mu_{k1} = \frac{K_2}{K_1}, \mu_c = \frac{C_2}{C_1}$$

则可得到方程的无量纲化形式,即数学方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (x_1 - x_2) + f(x_1) = 0 \\ \mu_m \ddot{x}_2 + 2\zeta(1 + \mu_c)\dot{x}_2 + (1 + \mu_{k1})x_2 - 2\zeta\dot{x}_1 - x_1 = \sin(\omega t + \tau) \end{cases} \quad (2)$$

非线性部分为

$$f(x_1) = \begin{cases} \mu_{k0}(x_1 - \delta) & x_1 > \delta \\ 0 & |x_1| \leq \delta \\ \mu_{k0}(x_1 + \delta) & x_1 < -\delta \end{cases}$$

式(2)中的系数有5个,随着变量 ω 的变化,系统的运动特性将呈现复杂的运动特征。选取 $\mu_m = \mu_c = \mu_{k1} = 1, \mu_{k0} = 25, \zeta = 0.2, \delta = 0.2$,首先确定质量 M_1 与线性弹簧 K_0 不发生接触的频带范围。此时,系统为一个线性系统,将式(2)中的非线性项去掉,即可得到线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\zeta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (x_1 - x_2) = 0 \\ \mu_m \ddot{x}_2 + 2\zeta\mu_c \dot{x}_2 + \mu_{k1}x_2 + \ddot{x}_1 = \sin(\omega t + \tau) \end{cases} \quad (3)$$

根据动力学模型,对于质量 M_1 ,输入可以认为是 X_2 ,输出为 X_1 ;对于质量 M_2 ,输入为激励信号 $\sin(\omega t + \tau)$,输出为 X_2 ;而整个系统的输入为激励信号 $\sin(\omega t + \tau)$,输出为 X_1 ,建立式(3)的第一个方程的传递函数,有:

$$s^2 X_1(s) + 2\zeta s X_1(s) + X_1(s) = 2\zeta s X_2(s) + X_2(s)$$

则:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{2\zeta s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad (4)$$

建立式(3)的第二个方程的传递函数,有:

$$\mu_m s^2 X_2(s) + 2\zeta\mu_c s X_2(s) + \mu_{k1} X_2(s) + s^2 G_1(s) X_2(s) = X_i(s)$$

则:

$$G_2(s) = \frac{X_2(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{[\mu_m + G_1(s)]s^2 + 2\zeta\mu_c s + \mu_{k1}} \quad (5)$$

以系统激励信号为输入信号,输出为 $X_1(s)$,则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{X_i(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

则:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{[\mu_m + G_1(s)]s^2 + 2\zeta\mu_c s + \mu_{k1}} \quad (6)$$

将 $\mu_m = \mu_c = \mu_{k1} = 1, \mu_{k0} = 25, \zeta = 0.2, \delta = 0.2$ 代入式(6)中可以得到:

$$G(s) = \frac{0.4s + 1}{s^4 + 1.2s^3 + 3.16s^2 + 0.8s + 1}$$

在Simulink中绘制系统的伯德图,如图2所示。可以看出,系统在频率为1.9附近增益为0.2(纵坐标最小值设为0.2),随后继续下降,因此,系统只有在频率低于1.9时才可能与线性弹簧 K_0 发生接触碰撞。图中横坐标为频率,纵坐标为增益。

1.2 分岔图和相图

根据上述分析,并根据图2和式(7),可知当 $\mu_m = \mu_c = \mu_{k1} = 1, \mu_{k0} = 25, \zeta = 0.2, \delta = 0.2$ 时,系统中质量 M_1 仅在激励频率小于1.9时才会与线性弹簧 K_0 发生接触并碰撞,系统进入非线性运行范围,而在频率高于1.9时,系统整体呈现线性状态。将参数代入式

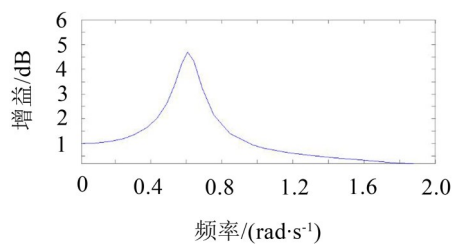


图2 伯德图

(2), 令 $y_1 = x_1, y_2 = \dot{y}_1; y_3 = x_2, y_4 = \dot{y}_3$, 对方程进行状态转换, 转换为1阶微分方程, 即状态方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 + 2\zeta(y_2 - y_4) + (y_1 - y_3) + f(y_1) = 0 \\ \dot{y}_4 = \dot{y}_3 \\ \mu_m \dot{y}_4 + 2\zeta\mu_c y_4 + \mu_{k1} y_3 - 2\zeta(y_2 - y_4) - (y_1 - y_3) \\ = \sin(\omega t + \tau) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中非线性部分 $f(y_1)$ 为

$$f(y_1) = \begin{cases} \mu_{k0}(y_1 - \delta) & y_1 > \delta \\ 0 & |y_1| \leq \delta \\ \mu_{k0}(y_1 + \delta) & y_1 < -\delta \end{cases}$$

根据状态方程式(7), 经过编程绘制分岔图, 如图3所示。图中横坐标为频率 ω , 纵坐标均为相对速度 $y_2 - y_4$ 。

从分岔图3中可以看出, 随着频率 ω 的变化, 含有间隙的2自由度振动系统随着激励频率的变化, 系统出现了单周期、2周期、4周期和混沌等复杂的非线性运动特征。根据分岔图, 选取图3中的1.35、

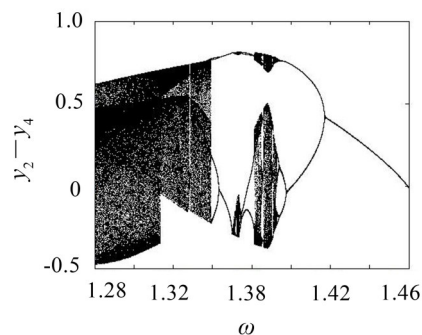


图3 分岔图

1.395、1.4、1.44, 如图4所示。图中横坐标为 M_1 相对 M_2 的位移 $y_1 - y_3$, 纵坐标为 M_1 相对 M_2 的速度 $y_2 - y_4$ 。

2 电路仿真

使用等效电路实现振动系统的分析, 首先要将振动系统的方程转换成等效的电路方程^[4-7], 将式(7)转换为积分形式:

$$\begin{cases} y_1 = \int y_2 dt \\ y_2 = \int [2\zeta(y_4 - y_2) + (y_3 - y_1) - f(y_1)] dt \\ y_3 = \int y_4 dt \\ y_4 = \int \{ [\sin(\omega t + \tau) - 2\zeta\mu_c y_4 - \mu_{k1} y_3 + 2\zeta(y_2 - y_4) + (y_1 - y_3)] / \mu_m \} dt \end{cases} \quad (8)$$

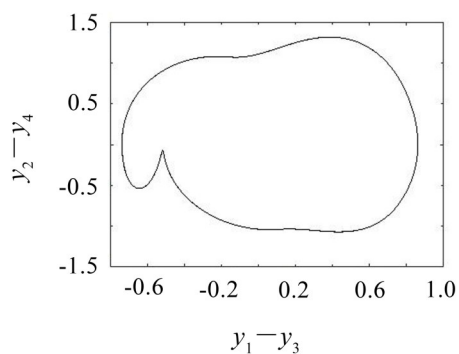
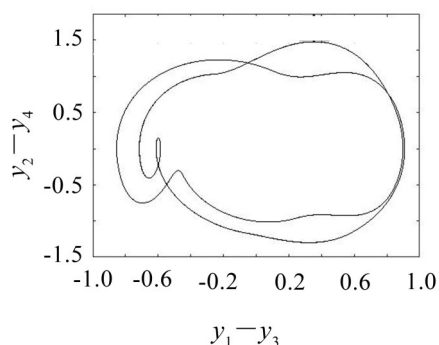
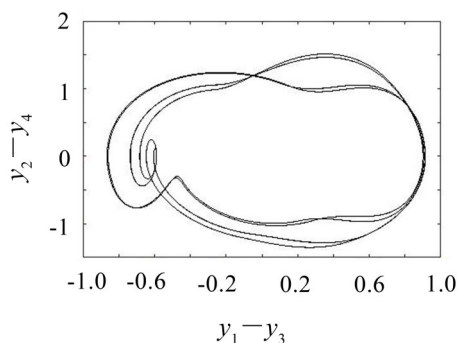
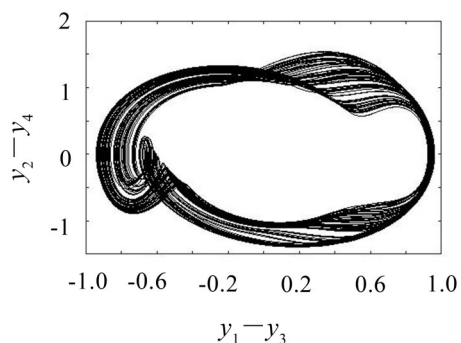
(a) $\omega=1.44$ (b) $\omega=1.4$ (c) $\omega=1.395$ (d) $\omega=1.35$

图4 相图

非线性部分为

$$f(y_1) = \begin{cases} \mu_{k0}(y_1 - \delta) & y_1 > \delta \\ 0 & |y_1| \leq \delta \\ \mu_{k0}(y_1 + \delta) & y_1 < -\delta \end{cases}$$

在此选择有源积分电路,将式(8)转换成等效的电路方程即:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \int y_2 dt \\ y_2 = -\frac{1}{R_3 C_3} \int (y_2 - y_4) dt - \\ \frac{1}{R_4 C_3} \int (y_1 - y_3) dt - \frac{1}{R_5 C_3} \int f(y_1) dt \\ y_3 = \frac{1}{R_2 C_2} \int y_4 dt \\ y_4 = -\frac{1}{R_6 C_4} \int y_4 dt - \frac{1}{R_7 C_4} \int y_3 dt + \\ \frac{1}{R_8 C_4} \int (y_2 - y_4) dt + \frac{1}{R_9 C_4} \int (y_1 - y_3) dt + \\ \frac{V}{R_{10} C_4} \int \sin(\omega t + \tau) dt \end{cases} \quad (9)$$

非线性部分为

$$f(y_1) = \mu_{k0} y_1 - 0.5 \mu_{k0} (|y_1 + \delta| - |y_1 - \delta|)$$

分别选用4个积分模块来实现式(9),其中运算放大器选用TL074CN,电路设计图如图5所示。其中第一个方程由U1A和U1B实现;第二个方程由U2C、U4B和U4C组成;第三个方程由U1C和U1D组成;第四个方程由U3A、U3B、U3C组成,U4A和U2A为反相器,非线性函数由软件提供的NONLINEAR-DEPENDENT模块实现,供电电压选择 $\pm 18\text{ V}$,将式(9)转换为2阶微分方程^[8-9],则有:

$$\begin{cases} R_1 C_1 \ddot{y}_1 + \frac{1}{R_3 C_3} (R_1 C_1 \dot{y}_1 - R_2 C_2 \dot{y}_3) + \\ \frac{1}{R_4 C_3} (y_1 - y_3) + \frac{1}{R_5 C_3} f(y_1) = 0 \\ R_2 C_2 \ddot{y}_3 + \frac{R_2 C_2}{R_6 C_4} \dot{y}_3 + \frac{1}{R_7 C_4} y_3 - \frac{1}{R_8 C_4} \\ (R_1 C_1 \dot{y}_1 - R_2 C_2 \dot{y}_3) - \frac{1}{R_9 C_4} (y_1 - y_3) - \\ \frac{V}{R_{10} C_4} \sin(\omega t + \tau) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)和式(1)形式上完全相同,为了使两式实现等效,必须确定式(10)中各个参数的数值。根据无量纲化过程选取的参数,即 $\mu_m = \mu_c = \mu_{k1} = 1$, $\mu_{k0} = 25$, $\zeta = 0.2$, $\delta = 0.2$ 。考虑到电阻电容的影响,选取 $R_1 = R_2 = 10\text{ k}\Omega$, $R_{10} = 100\text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 22\text{ nF}$,则得到 $R_4 = R_7 = 30\text{ k}\Omega$, $R_5 = R_9 = 30\text{ k}\Omega$, $R_3 = R_6 = R_8 = 43.3\text{ k}\Omega$,其余电阻仅用于反相电路,所以均取 $100\text{ k}\Omega$ 。

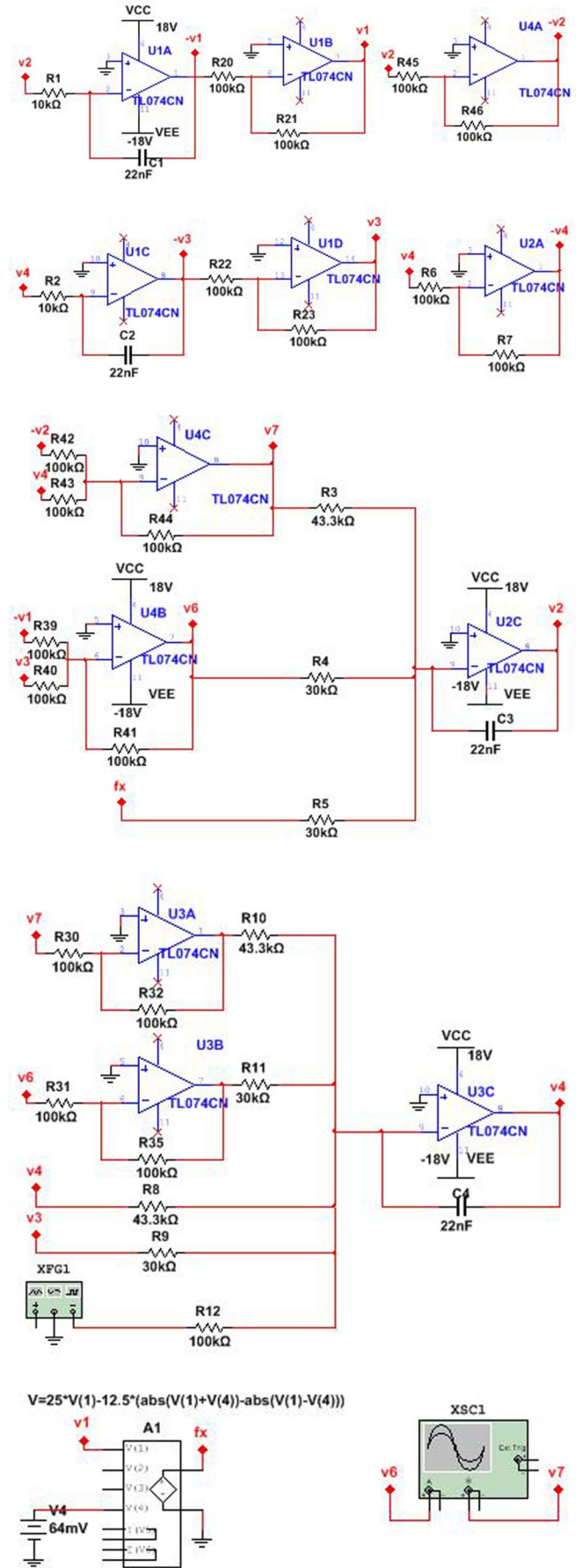


图5 电路图

正弦波函数的幅值可由 $\delta=0.2$ 求得:

$$\delta = B \frac{K_1}{P_2} = 0.064 \frac{1}{R_4 C_3} / \frac{V_m}{R_{10} C_4} = 0.064 \frac{R_{10}}{R_4 V} =$$

0.2, 即可得 $V_m = 1.067 \text{ V}$

由无量纲化过程, 可得出激励频率 f 和 ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}} = 2\pi f \sqrt{R_1 C_1 R_4 C_3}, \text{ 所以 } f = 417.6734\omega$$

3 Multisim12.0 仿真

通过 MultiSim12.0 对电路模型进行仿真, 函数发生器正弦波幅值为 1.067 V , 选择激励频率分别为 $563.86 \text{ Hz}(1.35\omega)$ 、 $582.65 \text{ Hz}(1.395\omega)$ 、 $584.74 \text{ Hz}(1.4\omega)$ 、 $601.45 \text{ Hz}(1.44\omega)$, 运行结果如图6所示。示波器中横坐标通道1为位移(y_1-y_3), 刻度为 100 mV/Div ; 纵坐标通道2为速度(y_2-y_4), 刻度为 100 mV/Div 。

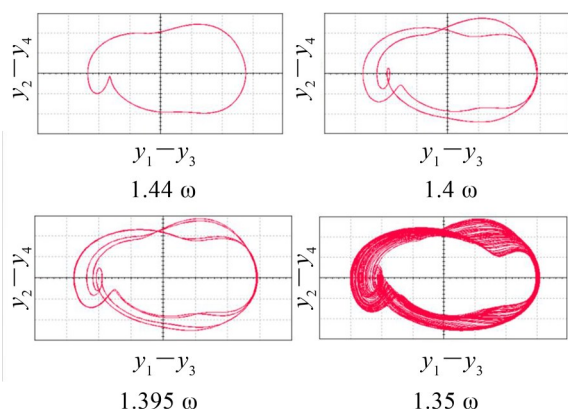


图6 电路仿真相图

相比较于通过编程绘制相图, Multisim12.0 绘制的相图和其完全一样。自行编程的运行时间为等效电路仿真的3倍, 说明了程序需要进行更进一步的优化, 当然更说明了编程对于非线性研究的影响太大, 能降低其影响, 可以提高研究效率。同时电路仿真还拥有着动态参数可调的优点, 利用等效电路分析非线性动力学, 降低对编程要求, 提高研究的效率。

4 结 语

通过对2自由度线性系统建立传递函数, 应用

bode图分析分段线性系统的碰撞区间, 确定分段线性动力学系统发生非线性特性的频率范围, 减少数值分析的计算时长。应用 Multisim12.0 电路仿真软件中的 NONLINEAR-DEPENDENT 模块及几个 TL074CN 运算放大器、电阻电容等简单的电路元器件, 快速建立与动力学模型等效的电路模型, 得到与数值仿真相同的结果。由此可见等效电路可以实现非线性动力学的分析和研究, 节省了数值仿真对算法、编程和计算机性能的要求, 为非线性动力学研究提供了一种很好的研究方法。

参考文献:

- [1] IHSAN PEHLIVAN, IRENE M MOROZ, SUNDAR-APANDIAN VAIDYANATHAN. Analysis, synchronization and circuit design of a novel butterfly attractor[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(20): 5077-5096.
- [2] 张有强, 丁旺才, 孙闯. 单自由度含间隙和干摩擦碰撞振动系统的分岔与混沌[J]. 振动与冲击, 2008, 27(7): 102-105.
- [3] DING F. Computational efficiency of the identification methods. Part B: Iterative algorithms[J]. Journal of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition, 2012, 4(5): 385-401.
- [4] 汪净, 潘丽华, 刘文辉, 等. 对称间隙单自由度振动系统的等效电路仿真和实验[J]. 振动与冲击, 2017, 36(1): 141-152.
- [5] WANG Z, LUO T Q. Multiformality of periodic-impact motions of a harmonically forced soft-impacting system and experimental verification based an electronic circuit[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2008, 36(3): 1168-1177.
- [6] KILIC R, SARACOĞLU O G, YILDIRIM FA. Experimental observations of EMI effects in autonomous[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32(3): 1168-1177.
- [7] RUIZ P, GUTIE J M, GUMEZ J. Experimental mastering of Nonlinear dynamics in circuits by sporadic pulses[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 36(3): 635-645.
- [8] LUO T Q, WANG Z. Dynamics and SC-CNN circuit implementation of a periodically forced non-smooth mechanical system[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(1): 23-45.
- [9] 张晓芳, 陈章耀, 李颖, 等. 周期激励下分段线性电路动力学行为[J]. 力学学报, 2009, 41(5): 765-774.