

文章编号:1006-1355(2021)02-0050-06

# 梁结构振动支承约束反力控制

田 瑞<sup>1,2</sup>, 王 栋<sup>2</sup>

(1. 中国飞机强度研究所, 西安 710065; 2. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

**摘要:** 支承或连接构件对梁结构的动力学性能有至关重要影响, 必须保证其在振动过程中不发生破坏或者失效。通过合理设计和布局附加弹性支承可以实现对这些重要连接构件所承受约束反力的控制。应用微分变换法推导含附加支承的梁结构支承约束反力及其对于附加支承位置和刚度的灵敏度表达式, 并通过优化设计附加支承位置和刚度实现具有弹性约束端的简支梁结构各支承约束反力的平衡, 可提高结构的动力学性能。

**关键词:** 振动与波; 支承; 约束反力; 位置和刚度; 微分变换法; 优化设计

中图分类号: O321; O327

文献标志码: A

DOI编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2021.02.008

## Optimal Design of Beam Structure Supports for Controlling Constraint Reaction Forces during Vibration

TIAN Rui<sup>1,2</sup>, WANG Dong<sup>2</sup>

(1. Aviation Industry Aircraft Strength Research Institute, Xi'an 710065, China;

2. School of Aerospace Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Supports and connecting members have a great influence on the dynamic performance of beam structures. Reasonable design and layout of the additional elastic supports can control the restraint reaction forces of these important connecting members. In this paper, the differential transformation method is used to derive the expression of the restraint reaction forces of supports of the beam with additional supports and the sensitivity of the reaction forces to the position and stiffness of the additional supports. Through the rational design of the position and stiffness of the additional supports, the balance of the reaction forces of the supports is realized, and the dynamic performance of the structure is improved.

**Key words:** vibration and wave; support; reaction force; position and stiffness; differential transformation; optimization design

梁是工程结构中一种最基本的构件,其动力学性能对结构或系统的整体性能有着至关重要的影响。因此,梁的动力学问题也得到了研究人员的广泛关注,并发表了许多研究成果。Akesson等<sup>[1]</sup>研究指出,存在一个最小的支承刚度可以使得悬臂梁的第1阶固有频率达到最大。Wang<sup>[2]</sup>研究了内部含有附加弹性支承的梁结构的振动问题,求得将梁的基频达到最大化时需要的最小支承刚度,还研究了轴力对梁的固有频率的影响。Wang等<sup>[3-5]</sup>研究了附加

支承刚度和位置的优化问题,推导了梁的固有频率对支承位置和刚度的灵敏度公式,并从理论上计算了将梁的第1阶固有频率提高到第2阶时的最小支承刚度。Chang等<sup>[6]</sup>分析了内部含有铰支承的梁结构在随机激励下的动力学响应。Aydin<sup>[7]</sup>研究了梁的动响应优化问题,通过优化支承位置和刚度来最小化悬臂梁的动响应。Xiao等<sup>[8]</sup>分析了受轴向载荷作用的梁结构在支承激励下的动响应。

上述诸多研究成果多是关于梁结构固有频率和动响应的计算及优化问题,这是由于固有频率对于梁结构的振动性能十分关键,提高低阶固有频率可以避免结构在较低的外激励频率下就发生共振,从而避免了由于共振导致的破坏或失效。但是,在实际工程中,梁结构的破坏并不完全由于共振引起。许多情况下,即使结构没有发生共振也可能被破坏,而且往往是从支承或接头处开始的。例如,飞机上经常出现的管道卡箍断裂问题。梁结构通常是通过

收稿日期:2020-06-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975470);

陕西省自然科学基金资助项目(2020JM-114)

作者简介:田瑞(1993-),男,西安市人,硕士研究生,主要研究方向为结构动力学。

E-mail: 458519989@qq.com

通信作者:王栋(1962-),男,教授,博士生导师。

Email: dwang@nwpu.edu.cn

支承或连接结构固定到基础上的,所以必然会承受基础通过支承传递过来外激励。梁在外激励作用下处于强迫振动时,支承将外载荷传递到基础,因此必然会承受外载荷的作用。若支承位置及刚度设计不合理,就极有可能导致某些支承因承受过大载荷或产生过度变形而发生破坏。这将导致结构约束的减少,在外激励作用下其振动将更加剧烈,进而导致其余支承因承受载荷过大而相继破坏,最终引起整个结构或系统的破坏或失效,甚至引发灾难性事故。因此,在设计梁的支承时,必须考虑支承承受的载荷情况。特别是当支承承受的载荷过大时,必须对支承载荷进行优化或控制。

学者们已经运用各种方法研究了含附加支承的梁结构的动力学问题。例如,理论法<sup>[3]</sup>、格林函数法<sup>[9]</sup>、瑞利-里兹法<sup>[10]</sup>等。虽然上述几种方法都可以用于计算支承的动态约束反力,但是需要求解的未知量比较多。尤其是当梁结构内含多个附加支承时,计算量非常大。因此,文中引入一种十分便捷的计算方法—微分变换法(Differential Transformation Method, DTM)。微分变换法最初是由赵家奎<sup>[11]</sup>提出用于求解线性和非线性的电路分析中初值问题的。基于泰勒级数展开,DTM提供了一种有效的求解线性和非线性微分方程的简单方法。林彬等<sup>[12]</sup>用DTM来解非线性微分方程,通过求解生物学方面的非线性微分方程模型的几个实例来验证这个方法的准确性和有效性。Chen等<sup>[13]</sup>使用这种方法来研究了Timoshenko梁横向振动时,在轴向载荷作用下产生的扭曲响应。该方法也适用于内部含附加支承的梁结构的支承约束反力的计算及优化,当将支承点处的连续性和协调性条件运用到该方法中时,还可以推导出支承约束反力及其对附加支承刚度和位置灵敏度的表达式,这将大大提高支承约束反力的优化设计效率。

## 1 微分变换法

基于泰勒级数展开的微分变换方法提供了一种简单的方法来求解高阶泰勒展开式系数。一般的微分方程可以转化为代数方程,从而很容易得到一个封闭的级数解。

解析函数 $w(x)$ 的第 $k$ 个微分变换定义为<sup>[14]</sup>

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k w(x)}{dx^k} \right) \quad (1)$$

则 $w(x)$ 可以表示为

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k W(k) \quad (2)$$

由式(2)可知,解析函数 $w(x)$ 是由泰勒级数展开得到的。当截取项数 $N$ 足够大时, $w(x) =$

$\sum_{k=N}^{\infty} (x-x_0)^k W(k)$  的值非常小。因此解析函数 $w(x)$ 可以表示为

$$w(x) = \sum_{k=0}^N (x-x_0)^k W(k) \quad (3)$$

实际应用中 $N$ 的取值由精度 $\varepsilon$ 确定。

表1为微分变换法中常用的基本数学运算<sup>[14]</sup>:

表1 微分变换法中基本数学运算

$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$w(x) = Ay(x)$	$W(k) = AY(k)$
$w(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1)Y(k+1)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)Y(k+n)$

## 2 微分变换法在梁结构中的应用

### 2.1 梁结构模型

如图1所示,假设梁结构受到基础加速度激励。

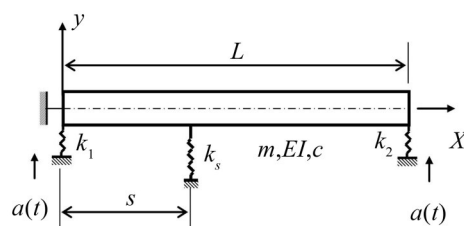


图1 附加一个中间支承的弹性边界梁结构模型

假设基础位移为 $w_g(t)$ ,梁相对基础的位移为 $w_r(x,t)$ ,绝对位移 $w(x,t)$ ,即:

$$w(x,t) = w_r(x,t) + w_g(t) \quad (4)$$

基于Euler-Bernoulli梁模型,图1中梁的弯曲振动的运动微分方程可写成如下形式<sup>[5]</sup>:

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_r(x,t)}{\partial t} = -m \ddot{w}_g(t) \quad (x \neq s) \quad (5)$$

式中: $EI$ 为抗弯刚度, $m$ 为单位长度梁质量, $c$ 为结构阻尼系数。 $\ddot{w}_g(t)$ 即为基础加速度 $a(t)$ ,不妨假设梁结构受到的是简谐的基础加速度激励,即:

$$a(t) = a_0 e^{j\omega t} \quad (6)$$

则式(5)可写成如下形式:

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_r(x,t)}{\partial t} = -ma_0 e^{j\omega t} \quad (x \neq s) \quad (7)$$

为了便于推导,需要把各参数无量纲化,即:

$$\gamma_s = \frac{k_s L^3}{EI}, \quad \gamma_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad \gamma_2 = \frac{k_2 L^3}{EI} \quad (8a)$$

$$\eta = \frac{w_r}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad b = \frac{s}{L}$$

$$C = cL^2 \left( \frac{1}{mEI} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8b)$$

$$q = \frac{ma_0 L^3}{EI}, \quad \lambda_f = \omega_f L^2 \left( \frac{m}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}$$

将式(8)代入式(7)得:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + C \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + q e^{i\lambda_f \tau} = 0 \quad (\xi \neq b) \quad (9)$$

由于外激励具有简谐形式,所以式(9)的解可以表示为

$$\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{i\lambda_f \tau} = \begin{cases} \bar{w}_1(\xi) e^{i\lambda_f \tau} & 0 \leq \xi \leq b \\ \bar{w}_2(\xi) e^{i\lambda_f \tau} & b \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

代入式(9)中:

$$\frac{\partial^4 \bar{w}(\xi)}{\partial \xi^4} - \lambda_f^2 \bar{w}(\xi) + jC\lambda_f \bar{w}(\xi) + q = 0 \quad (\xi \neq b) \quad (11)$$

## 2.2 振动微分方程的微分变换

对式(11)按照式(1)进行微分变换得:

$$\left. \begin{aligned} 24W(4) + (jC\lambda_f - \lambda_f^2)W(0) + q &= 0 \\ W(4) &= -\frac{(jC\lambda_f - \lambda_f^2)W(0) + q}{24} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(11)两边同时对 $\xi$ 求 $k+1(k=0, 1, \dots)$ 阶导数,并进行微分变换得:

$$W(k+5) = -\frac{(jC\lambda_f - \lambda_f^2)W(k+1)}{(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \quad (13)$$

显然,当 $K \geq 4$ 时, $W(K)$ 均可由 $W(0)$ 、 $W(1)$ 、 $W(2)$ 、 $W(3)$ 的线性组合表示。

由于位移响应的表达式分为两段,因此需要在附加支承两侧分别选取一点进行微分变换。为了计算简便,通常可以选取梁两端点,即 $\xi_0=0$ 和1。所以将产生8个未知量 $W_1(0)$ 、 $W_1(1)$ 、 $W_1(2)$ 、 $W_1(3)$ ; $W_2(0)$ 、 $W_2(1)$ 、 $W_2(2)$ 、 $W_2(3)$ 。不妨设其为 $A_1$ 、 $\dots$ 、 $A_8$ 。这8个未知量的求解需要应用两个约束端的边界条件以及附加支承点处的协调条件。

## 2.3 边界条件和附加支承点处协调条件

(1) 左边界:

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} &= -\gamma_1 \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 = 0 \\ 6A_4 = -\gamma_1 A_1 \end{cases}$$

(2) 右边界:

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=1} &= \gamma_2 \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_7 = 0 \\ 6A_8 = \gamma_2 A_5 \end{cases}$$

据此可知,需求解的未知量为: $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_5$ 、 $A_6$ ,而这4个未知量可由附加支承点处的协调条件确定。

(2) 协调条件:

$$\begin{cases} \eta(b^-, \tau) = \eta(b^+, \tau) \\ \eta'(b^-, \tau) = \eta'(b^+, \tau) \\ \eta''(b^-, \tau) = \eta''(b^+, \tau) \\ \eta'''(b^-, \tau) - \gamma \eta(b^-, \tau) = \eta'''(b^+, \tau) \end{cases} \quad (16)$$

由于位移响应表达式(10)又可以表示为

$$\eta(\xi, \tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau} & 0 \leq \xi \leq b \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\xi-1)^k W_2(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau} & b \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

代入式(16),得:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (b-1)^k W_2(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} k b^{k-1} W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k (b-1)^{k-1} W_2(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) b^{k-2} W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) (b-1)^{k-2} W_2(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) b^{k-3} W_1(k) - \gamma_s \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) = \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) (b-1)^{k-3} W_2(k) \end{cases} \quad (18)$$

由式(18)即可得到如下形式的齐次线性方程组:

$$BA = F \quad (19)$$

其中: $B$ 是关于 $b$ 、 $\gamma_s$ 、 $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\lambda_f$ 的4阶方阵;

$$A = [A_1, A_2, A_5, A_6]^T;$$

$F$ 是式(19)中常数项组成的列阵,由外激励幅值 $a_0$ 确定。

## 2.4 支承约束反力计算

由式(19)即可求解未知量组 $A$ ,从而可以得到边界及附加支承的约束反力。

(1) 边界约束反力:

$$R_{\gamma_1} = -\gamma_1 \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0} = 6A_4 e^{i\lambda_f \tau} \quad (20)$$

$$R_{\gamma_2} =$$

$$-\gamma_2 \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} = -\frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = -6A_8 e^{i\lambda_f \tau} \quad (21)$$

(2) 附加支承约束反力:

$$\begin{aligned} R_{\gamma_s} &= -\gamma_s \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=b} = -\gamma_s \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau} \Big|_{\xi=b} = \\ &= -\gamma_s \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau} \end{aligned} \quad (22)$$

将式(21)至式(23)乘以 $EI/L^2$ ,即可得到有量纲的

约束反力。

对于无附加支承的简单梁结构,未知量的求解只需由边界条件即可确定,推导方法与此类似。

采用微分变换法计算梁结构的固有频率时,只需再删去振动微分方程中的阻尼项和外激励项,重复上述微分方程的求解过程,最后由未知系数有非零解的条件 $|\mathbf{B}|=0$ 求解各阶固有频率。

## 2.5 灵敏度计算

由式(21)至式(23)还可以计算支承约束反力对附加支承位置和刚度的灵敏度。

(1) 约束反力对附加支承位置的灵敏度:

$$\frac{\partial R_{\gamma_1}}{\partial b} = 6 \frac{\partial A_4}{\partial b} e^{i\lambda_j \tau} \quad (23)$$

$$\frac{\partial R_{\gamma_2}}{\partial b} = -6 \frac{\partial A_8}{\partial b} e^{i\lambda_j \tau} \quad (24)$$

$$\frac{\partial R_{\gamma_s}}{\partial b} = -\gamma_s \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{kb^{k-1}W_1(k) + b^k \frac{\partial W_1(k)}{\partial b}}{b^k} \right) \cdot e^{i\lambda_j \tau} \quad (25)$$

可发现上述灵敏度表达式都间接转换成了求 $\mathbf{A}$ 对附加支承位置 $b$ 的导数。由式(20)可知, $\mathbf{A}$ 对 $b$ 的导数可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b} = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b} - \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = -\mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} \quad (26)$$

(2) 约束反力对附加支承刚度的灵敏度:

$$\frac{\partial R_{\gamma_1}}{\partial \gamma_s} = 6 \frac{\partial A_4}{\partial \gamma_s} e^{i\lambda_j \tau} \quad (27)$$

$$\frac{\partial R_{\gamma_2}}{\partial \gamma_s} = -6 \frac{\partial A_8}{\partial \gamma_s} e^{i\lambda_j \tau} \quad (28)$$

$$\frac{\partial R_{\gamma_s}}{\partial \gamma_s} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{b^k W_1(k) + \gamma_s b^k \frac{\partial W_1(k)}{\partial \gamma_s}}{\gamma_s b^k} \right) \cdot e^{i\lambda_j \tau} \quad (29)$$

同理, $\mathbf{A}$ 对 $\gamma_s$ 的导数可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma_s} = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \gamma_s} - \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \gamma_s} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} = -\mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \gamma_s} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} \quad (30)$$

通过灵敏度可以快速确定设计变量的优化方向,提高优化效率。

## 3 目标函数

优化梁结构支承约束反力时,若梁本身无法再更改,此时通过优化支承位置和刚度同样可以实现对支承承受载荷的控制。优化过程中,可以把支承的位置 $s$ 和刚度 $k$ 作为设计变量,以各支承约束反力幅值的均方根误差(root-mean-square-error, RMSE)为优化目标函数,构建如下数学模型:

$$\begin{cases} \text{find } k, s \\ \min f(k, s) \\ \text{s.t. } s \in (0, L), k \in (0, \infty) \end{cases} \quad (31)$$

其中:

$$f = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|R_i| - \bar{R})^2}, \bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |R_i|$$

$n$ 为约束反力总个数。

## 4 数值算例

以图1所示的梁结构为例,梁跨度 $L=1.0$  m,直径 $D=0.05$  m,弹性模量为 $E=68.6$  GPa,密度为 $\rho=2\,800$  kg/m<sup>3</sup>;阻尼系数 $c=0.05$  N·s/m;两端约束刚度 $k_1=2k_2=50$  kN/m;激励幅值 $a_0=10$  g,  $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>。

### 4.1 跨中不含附加支承( $k_s=0$ )

表2为分别用微分变换法(DTM)和有限元法(FEM)计算所得的前4阶固有频率。DTM中取前20项,FEM中将梁离散为20个均匀单元。显然,这两种方法计算的固有频率几乎相同,仅第4阶固有频率的有较小误差。

表2 结构固有频率/Hz

$\omega_n$ (Hz)	DTM	FEM
1	16.892	16.892
2	32.846	32.846
3	223.453	223.453
4	608.444	608.455

表3为3种典型外激励频率作用下两个约束端的约束反力。由表3中数据可知,两端的约束反力很不平衡。右端约束刚度小于左端,反而承受了更大的约束载荷。特别是当外激励频率为 $1.5 \omega_1$ 时,右端约束反力是左端的近8倍,这非常不利于支承的安全性。还可以看出,当结构发生共振时,不仅是结构本身位移响应大,支承约束反力也非常大。

### 4.2 跨中含一个附加弹性支承

通过增加附加支承不仅可以实现对支承约束反力的均衡,同时还可以提高结构固有频率,避开共振。下面给出了两种不同优化目标下的优化结果。

(1) 优化目标: $R_1=R_k=R_2$

图2为3种不同外激励频率下约束反力均方根误差(RMSE)随附加支承位置和刚度的变化情况。观察可知,3种不同外激励频率下,均方根误差都只有唯一最小值点,其所对应的附加支承位置和刚度即为最优结果。

表4为3种典型外激励频率工况下的最优附加支承位置和刚度。显然,使均方根误差最小的附加支承位置和刚度条件即为实现各支承约束反力近似等值设计所需的附加支承条件,满足此条件即可达到均衡各支承约束反力的目的。而且,随外激励频率的增大,最优附加支承刚度值在逐渐减小,而最优



表3 端点约束反力

$\omega_f$	R/N					
	DTM		FEM		Error/(%)	
	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$	$R_1$	$R_2$
$0.5 \omega_{11}$	344.793	364.642	344.793	364.641	0.0	0.0
$\omega_1$	$2.496 \times 10^{66}$	$3.375 \times 10^{66}$	$2.504 \times 10^{66}$	$3.386 \times 10^{66}$	0.320	0.335
$1.5 \omega_1$	36.390	283.500	36.393	283.503	0.0	0.0

支承位置将逐渐向右端点靠近。同时,由于结构固有频率得到增大,因此与表3对比可知,在外激励为 $\omega_1$ 的工况下,两个约束端的约束反力大幅减小,有效避开了共振的影响。

#### (2) 优化目标: $R_1=2R_2$

由表4可知,虽然两个约束端刚度 $k_1=2k_2$ ,但是左侧约束端的约束反力却小于右端约束反力,这不利于弱支承的安全性。下文将通过附加支承位置和刚度的优化,使得约束反力 $R_1=2R_2$ ,即两个约束端承受的载荷按刚度比分配,实现保护弱约束支承及等强度支承设计目的。

由图3可知,3种典型外激励频率下均方根误差(RMSE)的极值点均不唯一,因为存在多组刚度和位置匹配条件均可满足 $R_1=2R_2$ 的优化目标。但是,它们有共同且最小的附加支承刚度条件 $k_s=25$  kN/m,此时附加支承必须位于右端点。同时,随附

表4 优化结果

$\omega_f$	最优支承条件		R/N	RMSE/N
	$k/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-1})$	$s/\text{m}$		
$0.5 \omega_1$	31.915	0.521	$R_1$ 212.166	0.817
			$R_k$ 213.357	
			$R_2$ 214.378	
			$R_1$ 485.994	
$\omega_1$	30.421	0.600	$R_k$ 488.876	2.825
			$R_2$ 489.981	
			$R_1$ 420.120	
			$R_k$ 420.986	
$1.5 \omega_1$	28.244	0.731	$R_2$ 420.636	0.126

加支承刚度的增大,满足要求的附加支承位置将逐渐向左端点移动。

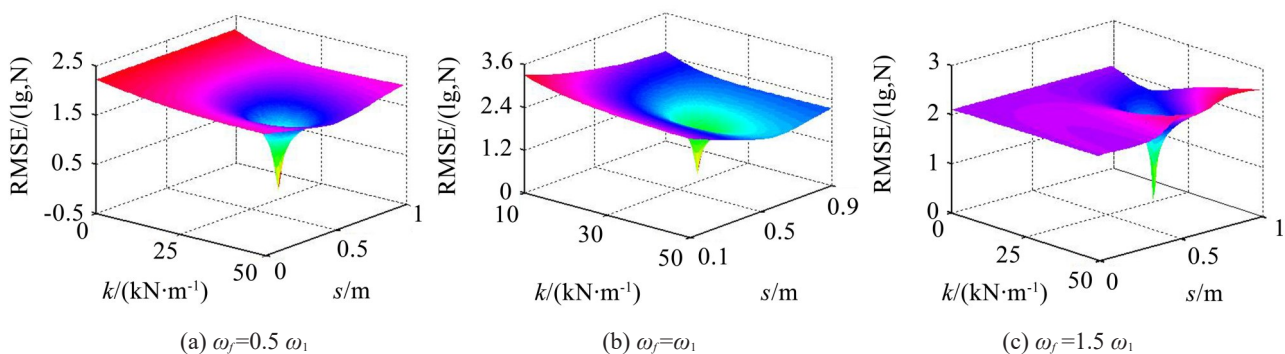
表5列出了最小附加支承刚度条件及支承约束反力。由于此时附加支承位置在右端点,而实际工程中有时在结构接头处增加附加支承并不容易实现。此时需要适当增大支承刚度,而将支承位置向梁跨中移动。

表6给出了附加支承刚度增加到50 kN/m时,满足优化目标的附加支承位置条件及支承约束反力。但是当外激励频率增大 $1.5 \omega_1$ 时,支承约束反力比较大,这是由于此时结构的第1阶固有频率增大到与外激励频率较接近,所以导致约束反力较大。

因此实际中还需考虑共振的影响,要在避免共振的前提条件下,尽可能平衡各支承约束反力。

表5 最小支承刚度条件

$\omega_f$	附加支承条件		R/N	RMSE/N
	$k/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-1})$	$s/\text{m}$		
$0.5 \omega_1$			$R_1$ 321.074	0.0
			$R_k$ 160.054	
			$R_2$ 160.054	
			$R_1$ 756.662	
$\omega_1$	25	1.0	$R_k$ 378.331	0.0
			$R_2$ 378.331	
			$R_1$ 599.531	
			$R_k$ 299.767	
$1.5 \omega_1$			$R_2$ 299.767	0.0

图2  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_k$ 的均方根误差(RMSE)

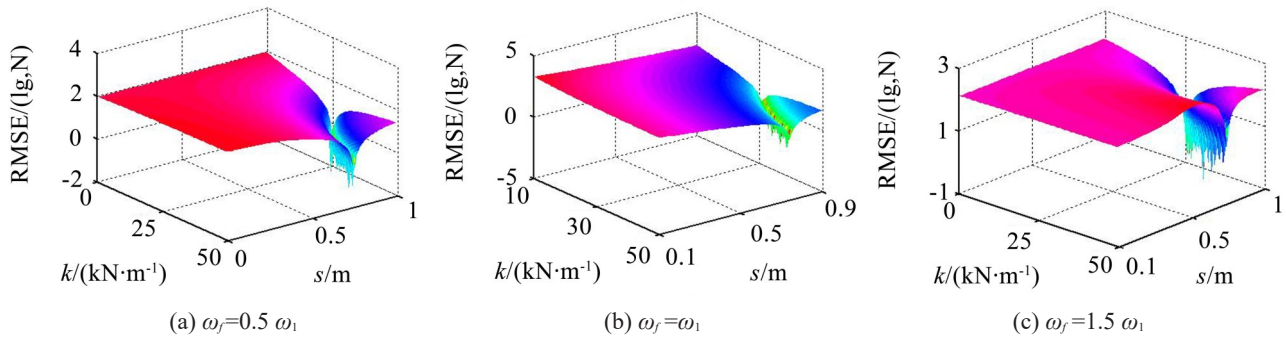
图3  $R_1$ 、 $R_2$ 的均方根误差(RMSE)

表6 中间附加支承条件

$\omega_f$	附加支承条件		$R/N$	RMSE /N
	$k/(kN \cdot m^{-1})$	$s/m$		
0.5 $\omega_1$			$R_1$	243.808
			$R_k$	250.556
			$R_2$	121.970
$\omega_1$	50	0.743	$R_1$	429.398
			$R_k$	440.897
			$R_2$	214.522
1.5 $\omega_1$			$R_1$	1 611.366
			$R_k$	1 649.255
			$R_2$	801.290

## 5 结 语

本文将微分变换法拓展应用于跨中含附加支承的梁结构支承约束反力的计算及优化问题。推导了约束反力及其对附加支承位置和刚度的灵敏度的表达式。从而可以快速确定附加支承刚度和位置的变化对这些连接构件约束反力的影响。

研究表明,梁结构振动过程中各支承所承受的载荷往往不均衡,通过合理设计附加支承刚度和位置可以实现对支承约束反力的控制,从而实现对结构系统振动性能的改善及结构疲劳使用寿命的提高。

### 参考文献:

- [1] AKESSON B, OLHOFF N. Minimum stiffness of optimally located supports for maximum value of beam eigenfrequencies[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 20: 457-463.
- [2] WANG C Y. Minimum stiffness of an internal elastic support to maximize the fundamental frequency of a vibrating beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 259: 229-232.
- [3] WANG D, FRISWELL M I, LEI Y. Maximizing the natural frequency of a beam with an intermediate elastic support[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291(3-5): 1229-1238.
- [4] WANG D. Optimal design of an intermediate support for a beam with elastically restrained boundaries[J]. Journal of Vibration and Acoustic, 2011, 133(3), 031014-1-031014-8.
- [5] 王栋. 结构优化设计-探索与进展[M]. 2版. 北京:工业出版社, 2018.
- [6] CHANG T P, LIN G L, CHANG E. Vibrations analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillator[J]. International Journal of Solid and Structures, 2006, 43: 6398-6412.
- [7] AYDIN E. Minimum dynamic response of cantilever beams supported by optimal elastic springs[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2014, 51(3): 377-402.
- [8] XIAO W, WANG F, LIU J. Analysis of axial compressive loaded beam under random support excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 410: 378-388.
- [9] REZAEIE PAJAND M, RAJABZADEH SAFAEI N, HOZHABROSSADATI S M. Three-dimensional deformations of a curved circular beam subjected to thermo-mechanical loading using Green's function method [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 142-143: 163-175.
- [10] PRADHAN K K, CHAKRAVERTY S. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method[J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 51: 175-184.
- [11] 赵家奎. 微分变换及其在电路中的应用[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 1986.
- [12] 林彬, 李开泰. 求解非线性微分方程的微分变换方法[J]. 兰州大学学报, 2009(6): 132-135.
- [13] CHEN C K, HO S H. Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, 41(11): 1339-1356.
- [14] NI Q, ZHANG Z L, WANG L. Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217: 7028-7038.