

文章编号:1006-1355(2009)05-0050-04

压电层合板的振动主动控制

缙新科, 崔明月

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃兰州 730050)

摘 要: 为计及压电层的刚度特性, 基于一阶剪切变形理论推导压电层合板的抗弯刚度, 由 Hamilton 变分原理建立压电层合板的有限元模型, 采用模态叠加方法对有限元模型降阶。在应变最大处配置制动器 and 传感器, 并采用基于二次线性控制的独立模态空间控制法来进行板结构的主动控制。数值算例验证了这种力学建模方法和控制方法的有效性。

关键词: 振动与波; 智能结构; 振动控制; 压电制动器; 二次线性控制

中图分类号: O328; TP13 **文献标识码:** A

Active Vibration Suppression of Piezoelectric Laminated Plates

GOU Xin-ke, CUI Ming-yue

(College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: In the study, the flexural rigidity of piezoelectric laminated plate is derived based on the shear deformation theory of order one. The dynamic equation of the composite plate in a finite element form is deduced by using Hamilton's principle, and the vibration-mode superposition method is employed. In order to get large driving force and efficient sensor signals, actuators and sensors are placed at the locations where the strain is locally maximum on the plate surface. Subsequently, an Independent Modal Space Control (IMSC) technique based Linear Quadratic Regulator (LQR) control methodology is adopted for the vibration suppression of the plate. The numerical example verifies the efficiency of this modeling and the method of control.

Key words: vibration and wave; smart structure; vibration control; piezoelectric actuators; linear quadratic regulator (LQR)

智能结构的振动主动控制研究已成为当前动力学领域的前沿课题, 压电材料由于具有良好的机电耦合性能, 广泛应用于结构主动控制系统中。对于压电层合板的建模, 通常忽略由于粘贴压电材料或者埋入压电材料给板结构带来刚度和质量上的改变, 用一个分布力矩表达压电层对结构的控制作用^[1-5], 这种方法无法准确反映结构的固有特性。

压电结构的建模和控制方法是应用压电材料

的两个很重要的方面, 本文从层合板的一阶横向剪切变形理论推导压电层合板的等效横向抗弯刚度, 由 Hamilton 变分原理建立压电

层合板的有限元模型, 采用模态叠加方法对原系统降阶。然后采用基于二次线性控制 (LQR) 的独立模态空间控制法进行压层合电板的振动控制。

1 压电层合板的横向抗弯刚度

含压电制动器的对称层合板厚度为 h , 宽度为 b , 由层合板一阶横向剪切变形理论可知板中面外任意一点的位移为

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v &= v^0(x, y) - z\phi_y(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

式中, u^0 、 v^0 分别代表板中面某点的位移, ϕ_x 、 ϕ_y 代

收稿日期: 2008-12-12

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目 (编号: 3ZS051-A25-033)

作者简介: 缙新科 (1967.9-), 男, 甘肃天水人, 教授, 主要研究方向为智能结构及振动控制。

E-mail: cuiminyue@21cn.com

表中面法线变形后在 xz 平面和 yz 平面上的转角。
层合板的每个叠层有以下的应力—应变关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中, $\bar{Q}_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 是经过坐标转换后的偏轴刚度系数, 将式(2)沿层合板厚度积分, 对于对称层合板可得到

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad i, j = 1, 2, 6$$

$D_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 为弯曲刚度。考虑到层合板是一维构件, 引入近似条件

$$M_y = M_{xy} = 0 \quad (4)$$

这样式(3)可简化为

$$M_x = \bar{D}_{11} \chi_x \quad (5)$$

\bar{D}_{11} 为单位宽度的等效抗弯刚度

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} = & D_{11} + \frac{D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}}{D_{22}D_{66} - D_{26}D_{66}} D_{12} + \\ & \frac{D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}}{D_{22}D_{66} - D_{26}D_{66}} D_{16} \end{aligned} \quad (6)$$

2 压电层合板的有限元模型

2.1 单元方程

从热力学理论可严格地推导出反映压电材料机电耦合特性的第一类压电方程^[6]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= S^E \sigma + d^T E \\ D &= d \sigma + \lambda^E E \end{aligned} \quad (7)$$

中 ε 为应变向量, S^E 为闭路柔度矩阵, σ 为应力向量, d 为压电应变常数矩阵, E 为电场强度向量; D 为电位移向量, λ^E 为自由介电常数矩阵。

含压电层的板单元如图 1 所示, 长 l , 宽 b , 基体材料厚度为 h , 压电层厚度为 t , v_d 为输入电压。假

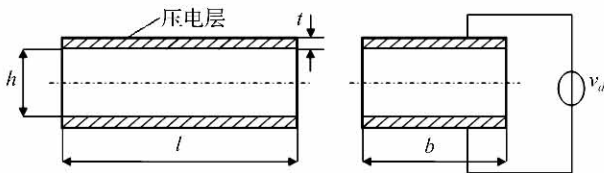


图 1 压电层合板单元

Fig. 1 Piezoelectric laminated plate element

设压电材料和基体材料耦合得很好, 变形连续, 压电层合板单元的内位移可写为^[7]

$$w(x, t) = N \delta \quad (8)$$

N 为形状函数矩阵; δ 为结点位移列阵, 压电片的 x 向应变

$$\varepsilon_1 = \frac{(h+t)}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \frac{(h+t)}{2} B \delta \quad (9)$$

B 为几何矩阵, 压电材料的 z 向电场强度为

$$E_3 = \frac{v_d}{t} \quad (10)$$

压电梁单元的动力学模型由 Hamilton 变分原理导出

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - H + W) dt = 0 \quad (11)$$

L, T, H 和 W 分别为系统的拉格朗日函数, 动能, 电焓和外力功

$$T = \frac{1}{2} \int_v \dot{w}^T \rho \dot{w} dv$$

$$H = \frac{1}{2} \int_0^l (B \delta)^T (DB \delta) dx - \frac{1}{2} \int_v E_3 D_3 dv$$

$$W = P^T \delta - \int_s v_d D_3 ds \quad (12)$$

其中 $D = \bar{D}b$, 很容易由式(6)得到, D_3 为电位移, ρ 为压电层合板的平均密度, P 为结点力列阵。将式(12)代入式(11), 并求一阶变分, 得到压电层合板单元动力学方程

$$M \ddot{\delta} + K \dot{\delta} = P^T + K_d v_d \quad (13-a)$$

$$\frac{e_{31}(h+t)b}{4} \hat{B}^T \delta + \frac{\varepsilon_{33}bl}{t} v_d = Q \quad (13-b)$$

式中: $K_d = \frac{e_{31}(h+t)b}{4} \hat{B}^T$, 为输入电压系数矩阵; ε_{33}

为夹持介电常数; e_{31} 为压电应力常数; $M = \int_v N^T \rho N dv$, 为质量矩阵; $K = \int_0^l B^T DB dx$, 为刚度矩阵;

$Q = \int_s D_3 ds$, 为压电片表面自由电荷; $\hat{B} = \int_0^l B dx$ 。

由式(13)确定的有限元方程对于压电制动器 and 传感器都是适用的: 当用作制动器时, 输入电压 v_d 已知, 由式(13-a)可以求得节点位移; 当用作传感器时, 输入电压 $v_d = 0$, 由式(13-b)可以确定总电荷与结点位移的关系。

2.2 压电制动器的位置优化

柔性结构振动主动控制中一个很重要的问题是如何确定传感器与制动器的位置以达到最佳的制动效果和传感效果。通常认为柔性结构的振动能量主要集中在低频段, 只要消耗掉头几阶模态的振动能量便可以达到振动抑制的目的。压电制动

器和传感器均通过力电耦合效应工作,压电元件粘贴位置处的应变越大,压电材料所产生的制动效果或者传感效果越好。

基于以上的观点,压电层合板的应变最大处为压电片的最佳粘贴位置,由式(9)可知,应变最大的位置即是柔性板曲率最大的位置。本文选择两对传感器和制动器对位配置用于控制压电层合板的前两阶模态。

2.3 系统有限元方程的组集

图2所示示为一压电悬臂板,在固定端建立右手坐标系,基体部分为300 mm×150 mm×3 mm的铝板(A16061),压电陶瓷(PZT-4)几何参数为30 mm×30 mm×0.4 mm,材料常数见表1。压电层合板的曲率最大处粘贴压电片,两对压电制动器和传感器分别对位配置在x=0 mm和x=159 mm处。将悬臂梁分为6个单元,1、4单元为含压电层的梁单元,长30 mm,其它为普通梁单元,2单元长45 mm,3、5单元长60 mm,6单元长75 mm。

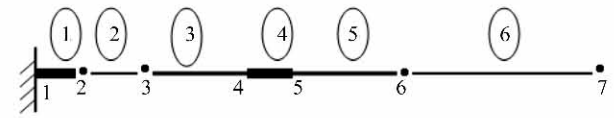


图2 悬臂板的单元划分

Fig. 2 Division of cantilever plate element

表1 材料常数

Table 1 Material constants

	PZT-4	A16061
E_{11}/GPa	63.0	68.965
E_{22}/GPa	63.0	68.965
E_{12}/GPa	24.6	27.0
ν_{12}	0.35	0.33
$e_{31}/\text{NV}^{-1}\text{m}^{-1}$	-6.98	/
ρ/kgm^{-3}	7 600.0	2 700.0

按照式(13)列写压电层合板单元的动力学方程,并和其它普通板单元组集,处理边界条件后,得到系统的有限元方程

$$\bar{M}\ddot{W} + \bar{K}W = ; \bar{K}_d \bar{V}_d$$
$$\bar{V}_s = \bar{R} \bar{K}_d^T \dot{W}$$

(14)

式中: \bar{M} 为总体质量矩阵; \bar{K} 为总体刚度矩阵; \bar{K}_d 为输入电压系数矩阵; W 为结点位移向量; \bar{V}_d 为输入电压向量; \bar{V}_s 为输出电压向量; \bar{R} 为传感放大电路的电阻矩阵。

3 振动主动控制的设计与仿真

3.1 系统的LQR最优控制器的设计

为了便于利用二次线性最优控制理论设计控制器^[8-9],将式(14)写成状态空间形式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

(15)

式中 $x = [W \quad \dot{W}]^T$; $u = \bar{V}_d$; $y = \bar{V}_s$; $A =$
$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K}_d & 0 \end{bmatrix}_{24 \times 24}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}^{-1}\bar{K}_d \end{bmatrix}_{24 \times 24}; \quad C =$$
$$[0 \quad \bar{R}\bar{K}_d^T]_{2 \times 24};$$

采用第一阶和第二阶振型向量组成的线性变换矩阵 Φ 对式(14)降阶,并将降阶后的方程写成状态空间形式

$$\dot{q} = \bar{A}q + \bar{B}u$$
$$y = \bar{C}q$$

(16)

q 为模态坐标及模态速度组成的4维状态向量, q 和 x 有如下的线性变换关系

$$x = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} q = \Phi q$$

(17)

相应的有

$$q_0 = \Phi^{-1}x_0$$
$$\bar{A} = \Phi^{-1}A\Phi$$
$$\bar{B} = \Phi^{-1}B\Phi$$
$$\bar{C} = \Phi^{-1}C\Phi$$

(18)

x_0 、 q_0 为系统降阶前后的初始状态; Φ^{-1} 表示矩阵 Φ 的逆阵。

采用下面的线性控制律

$$u(t) = -Gq(t)$$

(19)

G 为模态控制增益。采用LQR方法,目标函数

$$J = \int_0^\infty [q^T(t)Qq(t) +$$
$$u^T(t)Ru(t)]dt \rightarrow \min$$

(20)

式中 Q 为半正定矩阵, E 为正定矩阵。

优化增益

$$G = R^{-1}\bar{B}^T P$$

(21)

其中 P 满足Ricatti方程

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P + Q - P\bar{B}R^{-1}\bar{B}^T P = 0$$

(22)

在采用LQR算法设计控制力时,权矩阵 Q 和 R 是两个重要的控制参数,它们决定了控制力和结构反应的大小。从式(20)所示的性能指标可以看出, Q 越大,结构反应越小,而控制力越大; R 越小,则控制力越大,结构反应越小。

Q 和 R 的选取可按下式^[10]

$$Q = \alpha \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix}, \quad R = \beta I$$

(23)

式中： \bar{M} 为总体质量矩阵； \bar{K} 为总体刚度矩阵； I 为单位矩阵； α 和 β 是待定系数。在本算例中，取 $\alpha = 100, \beta = 8 \times 10^{-6}$ 。

3.2 数值算例仿真

为了验证方法和程序的正确性，由前文所给的压电悬臂板各参数，将压电板划分成 6 个单元，用文中方法计算出的前 3 阶频率及 ANSYS 的计算结果如表 2 所示^[11]。从表可看出，在低频范围内，用文中方法计算出的频率值同 ANSYS 计算值较接近，频率误差在 2% 以内。

表 2 压电板的低阶固有频率

Table 2 Piezoelectric plate low order natural frequency

模态阶次	1	2	3
本文计算频率/Hz	27.84	120.81	72.22
ANSYS 计算频率/Hz	28.22	123.02	175.81
误差/%	1.4	1.0	2.0

采用 LQR 方法，对悬臂板的振动系统进行控制。在瞬态分析中，假定板上中点处受一个 10 N 力的冲击作用 0.1 ms，使节点 7 处产生一个初始位移。图 3，图 4 分别为控制板的第 1 阶模态和第 2 阶模态振动，控制与未控制时，节点 7 处的位移响应。

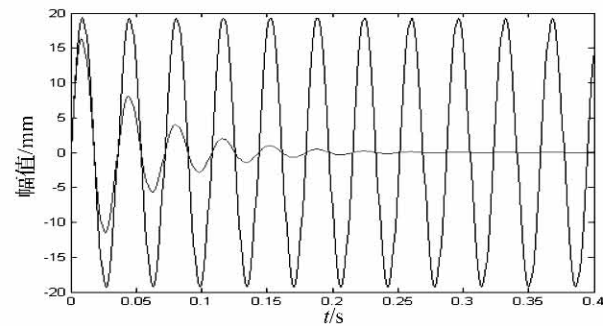


图 3 第 1 阶模态振动控制与未控制的位移响应
Fig. 3 The first-order modal vibration displacement response

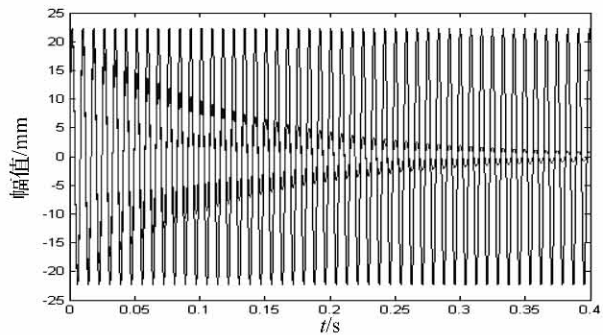


图 4 第 2 阶模态振动控制与未控制的位移响应
Fig. 4 The second-order modal vibration displacement response

4 结 语

根据层合板的一阶横向剪切变形理论推导的计及压电材料刚度特性的层合板等效横向抗弯刚度可准确反映压电结构的固有特性；由于有限元方法建立的模型通常自由度很大不利于控制器的设计，通过模态叠加原理可使有限元模型降阶；然后采用基于 LQR 的独立模态空间控制法来抑制结构的振动。本文方法计算出的低阶频率值同 ANSYS 结果进行了对比，两者基本一致。控制仿真结果可看出，文中方法能有效控制结构的振动。不过，控制哪阶模态振动和控制效果跟驱动器和传感器的位置有关，需要进行合理地布置。本文所提出的驱动器和传感器的位置优化方法只是近似粗略的优化位置，关于较好的驱动器和传感器的位置优化方法作者在另一论文中有较深入研究。

参考文献：

[1] Tzou H S, Tseng C T. Distributed Piezoelectric Sensor/actuator Design for Dynamic Measurement/control of Distributed Parametric System: A Piezoelectric Finite Element Approach [J]. **Journal of sound and vibration**, 1990, 138: 17 - 34.

[2] Wang S Y, Quack S T. Vibration Control of Smart Piezoelectric Composite Plates [J]. **Smart material and Structures**, 2001, 10: 637 - 644.

[3] Benjeddou A. Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: A Survey [J]. **Computers and Structures**, 2000, 76: 347 - 363.

[4] CHEE C, TONG L, STEVEN G P. Piezoelectric Actuator Orientation Optimization for Static Shape Control of Composite Plates [J]. **Composite Structures**, 2002, 55 (2): 169 - 184.

[5] 闫云聚, 姜节胜, 袁振宇. 复合材料层合板振动衰减主动控制力学模型 [J]. **振动与冲击**, 1997, 16 (4): 54 - 59.

[6] 陶宝祺. 智能材料结构 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1997, 8.

[7] 王勖成, 邵 敏. 有限元法基本原理和数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.

[8] 郑大钟. 线性系统理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[9] 顾仲权, 马扣根, 陈卫东. 振动主动控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1997. 6.

[10] 欧进萍. 结构振动控制——主动、半主动、智能控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2003, 61 - 87.

[11] 秦仙蓉等. 基于 Matlab 平台的组合结构动态分析工具箱的开发与应用 [J]. **振动与冲击**, 2003, 22 (4): 32 - 35.