

文章编号:1006-1355(2022)01-0014-06

含间隙多约束碰撞振动系统稳定性分析

王超¹, 丁旺才¹, 李得洋², 丁杰¹

(1. 兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070;

2. 兰州交通大学 材料科学与工程学院, 兰州 730070)

摘要:针对一类单自由度含间隙多约束碰撞振动系统,通过在碰撞面处建立系统的Poincaré映射,推导系统的Jacobi矩阵,将连续动力系统转换为离散动力系统,并利用Gram-Schmidt正交化和范式归一化计算得到系统的Lyapunov指数谱。通过数值模拟,计算系统混沌吸引子与周期吸引子的收敛序列,结合系统相图、单参分岔图及Lyapunov指数谱,分析系统周期运动稳定性及各类分岔现象,通过控制系统参数双向变化发现相邻周期运动间存在的周期共存现象,验证该计算方法的有效性和正确性,研究成果可为后续针对该系统的混沌判断及混沌控制提供理论依据。

关键词: 振动与波;碰撞振动;Lyapunov指数;混沌;分岔;稳定性

中图分类号:O322

文献标志码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2022.01.003

Stability Analysis of Impact Vibration Systems with Multiple Constraints and Clearances

WANG Chao¹, DING Wangcai¹, LI Deyang², DING Jie¹

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. School of Materials Science and Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A sort of single-DOF multi-constraint impact vibration systems with gaps is studied. The Poincaré mapping in the impact surface is established and the system's Jacobi matrix is derived. By transforming the continuous dynamic system into a discrete dynamic system and using Gram-Schmidt orthogonalization and paradigm Normalization, the Lyapunov exponent spectrum of the system is obtained. Through numerical simulation, the convergent sequence of the chaotic attractor and periodic attractor of the system is calculated. Combining the phase diagram, single-parameter bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of the system, the stability of the periodic motion of the system and various bifurcation phenomena are analyzed. Through the double-way change of the control system parameters, the phenomenon of periodic coexistence between adjacent periodic motions is found, which verifies the validity and correctness of the calculation method. This research provides a theoretical basis for the subsequent chaos judgment and chaos control of the system.

Key words: vibration and wave; vibro-impact; Lyapunov index; chaos; bifurcation; stability

含间隙的碰撞振动系统^[1-4],广泛存在于车辆、机械等各类工程领域中,由于间隙和各类约束引起了刚度突变,导致系统向量场Jacobi矩阵不连续,从而使系统表现出复杂且丰富的非光滑动力学行为。因此,深入研究该类系统的运动机理,分析参数对系

统稳定性的影响,掌握系统的全局性能等具有重要意义。

Lyapunov指数谱是一种判断系统相邻轨道间平均发散或收敛程度的度量工具,用于判定动力系统周期运动稳定性以及混沌运动特性。目前针对Lyapunov指数谱的研究大多基于光滑动力系统^[5-6],但由于非光滑动力系统Jacobi矩阵的不连续性,针对光滑动力系统的计算方法无法适用,因此近年来学者们针对特定的非光滑动力系统也提出了相应的计算方法。文献[7]针对碰撞振动系统,在连续碰撞间引入超越映射计算得到了该系统的Lyapunov指数谱。文献[8]对单自由度碰撞系统引入局部映射,利用Gram-Schmidt正交化和范式归一化计算得到了

收稿日期:2021-03-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11962013);甘肃省青年科技基金计划资助项目(21JR7RA328)

作者简介:王超(1995-),男,银川市人,硕士研究生,从事车辆系统动力学及控制研究。

E-mail: 347465034@qq.com

通信作者:丁旺才(1964-),男,兰州市人,教授,博士,从事车辆系统动力学、非线性动力学及控制研究。

E-mail: dingdd@163.com

该系统的 Lyapunov 指数谱。文献[9]介绍了 n 维碰撞系统 Floquet 乘子与 Lyapunov 指数谱的解析关系,并提出了相应的判据。文献[10]针对一类两自由度碰撞振动系统,结合文献[5-6]的方法讨论了系统混沌吸引子与周期吸引子的 Lyapunov 指数谱收敛序列。文献[11]研究了一类两自由度含间隙和预紧弹簧的力学模型,结合 Lyapunov 指数谱分析了系统稳定性,并用测试函数预测了系统发生擦边现象时的参数范围。文献[12]将含间隙碰撞系统在碰撞面处转化为离散系统,构建了 Poincaré 映射并通过数值仿真对照,验证了其方法的有效性和正确性。文献[13]研究了一种求解大型 Lyapunov 矩阵,采用并行预处理的变形共轭梯度法,通过仿真比较,确认了预处理算法显著优于未预处理算法。文献[14]针对两自由度含弹性约束系统,结合 Lyapunov 指数谱图、单参分岔图和相图分析了系统周期运动的稳定性及存在的各类分岔行为。文献[15]针对单自由度碰撞系统,在多参数协同仿真方法的基础上,结合胞映射法研究了系统在间隙 (b_1, b_2) 参数平面内各类周期运动分布及共存的特点,总结了相邻周期运动之间的转迁规律。

已有研究针对系统稳定性分析成果,大多基于同种约束碰撞振动系统。本文以铁路车辆转向架为工程背景,通过对轮对轴承与轴承止挡以及弹性约束的局部简化,得到单自由度含不同约束碰撞振动系统模型,在系统碰撞面处离散化处理,并利用 Gram-Schmidt 正交化和范式归一化计算得到该系统的 Lyapunov 指数谱。通过数值模拟分析,结合系统相图、单参分岔图及 Lyapunov 指数谱对照分析,讨论系统在单个参数变化下相应的 Lyapunov 指数变化情况,通过对本文所示动力系统的力学性能分析,可为后期机械系统的设计阶段把握其振动特性,为全局动力学特性、混沌控制以及鲁棒性等方面的研究提供重要的理论依据。

1 系统的力学模型

考虑图1所示的单自由度含刚性和弹性两种不同类型约束碰撞振动系统。质量为 M 的振子由刚度为 K_1 的线性弹簧和阻尼系数为 C 的线性阻尼器相连接,作用在振子 M 的上的水平力为简谐激振力 $P_1 \sin(\Omega T + \tau)$,使振子沿水平方向往返运动。振子 M 的位移为 X ,振子左侧固定一个刚性约束,刚性约束与振子的间隙为 B_1 ;振子右侧固定一个刚度为 K_2 的弹性约束,弹性约束面与振子的间隙为 B_2 。由于间隙的存在和碰撞的产生,系统会表现出复杂的非光滑动力学行为。

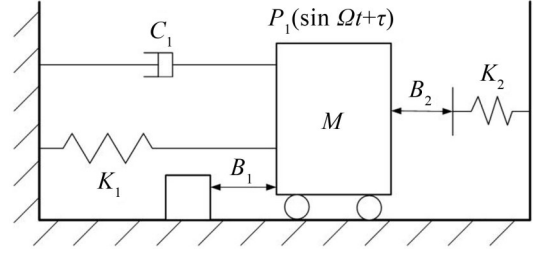


图1 单自由度含不同类型约束的碰撞振动系统

当振子位移 $-B_1 < X < B_2$ 时,与两侧约束都不发生碰撞,系统的运动微分方程为:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_1 X = P_1 \sin(\Omega T + \tau) \quad (1)$$

当振子位移 $X \geq B_2$ 时,将与右侧弹性约束接触,系统的运动微分方程为:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_1 X + K_2(X - B_2) = P_1 \sin(\Omega T + \tau) \quad (2)$$

当振子位移为 $X = -B_1$ 时,将于左侧刚性约束接触,此时满足:

$$\dot{X}_+ = -R\dot{X}_- \quad (3)$$

式中: \dot{X}_- 和 \dot{X}_+ 为振子与刚性约束碰撞前后的瞬时速度, R 为刚性碰撞恢复系数。

取无量纲量为: $x = XK_1/P_1$; $\Omega_0 = \sqrt{K_1/M}$;

$\zeta = C/2\sqrt{K_1 M}$; $\omega = \Omega/\Omega_0$; $t = \Omega_0 T$; $b_1 = K_1 B_1/P_1$;

$b_2 = K_1 B_2/P_1$; $\mu_k = K_2/K_1$ 。

经无量纲化后,系统无量纲微分方程的通解为:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\eta(t-t_1)}(c_3 \cos \omega_{d_2}(t-t_1) + c_4 \sin \omega_{d_2}(t-t_1)) + A_2 \sin(\omega t + \tau_0) + B_2 \cos(\omega t + \tau_0) & -b_1 < x < b_2 \\ x(t) = e^{-\eta(t-t_3)}(c_1 \cos \omega_{d_1}(t-t_3) + c_2 \sin \omega_{d_1}(t-t_3)) + A_1 \sin(\omega t + \tau_0) + B_1 \cos(\omega t + \tau_0) + \mu_k b_2 / (1 + \mu_k) & x \geq b_2 \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_-, & x = -b_1 (t = t_2) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\omega_{d_1} = \sqrt{1 + \mu_k - \zeta^2}$; $\omega_{d_2} = \sqrt{1 - \zeta^2}$; $\eta = \zeta$; t_1 为振子与两侧约束脱离的时刻; t_2 为振子与左侧刚性约束接触的时刻; t_3 为振子进入右侧弹性约束的时刻。 c_1, c_2, c_3, c_4 为积分常数,由初始条件确定, A_1, A_2, B_1, B_2 为振幅常数。

2 Poincaré 映射及 Lyapunov 指数谱计算

通过建立 Poincaré 映射研究系统周期运动的稳定性, Σ_n, Σ_{p+} 和 Σ_{q+} 分别代表定相位面、左侧刚性碰撞截面和右侧弹性碰撞截面:

$$\begin{cases} \Sigma_n = \{(x, \dot{x}, \theta) \in R^2 \times S^1, \theta = \text{mod}(\omega t, 2\pi/\omega)\} \\ \Sigma_{p+} = \{(x, \dot{x}, \theta) \in R^2 \times S^1, x = -b_1, \dot{x}_+ > 0\} \\ \Sigma_{q+} = \{(x, \dot{x}, \theta) \in R^2 \times S^1, x = b_2, \dot{x}_+ > 0\} \end{cases} \quad (5)$$

定相位面用于统计系统周期运动的周期数;碰撞截面用于统计振子与左右两侧约束面的碰撞次数,选择截面 Σ_p 建立系统的 Poincaré 映射。通过 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵在不动点的特征值研究系统运动的稳定性及分岔类型。

系统 Poincaré 映射的示意图如图 2 所示。根据接触过程可以将 Poincaré 映射分为四个阶段: P_1 :物块与右侧弹性约束面脱离后瞬间到与左侧刚性约束面接触前瞬间的阶段; P_2 :物块与左侧刚性约束面接触后到脱离前的阶段; P_3 :物块与左侧刚性约束面脱离后瞬间到与右侧弹性约束面接触前瞬间的阶段; P_4 :物块与右侧弹性约束面接触后瞬间到脱离前瞬间的阶段。以上 4 个映射阶段可以表示如下(式中正负号分别代表碰撞后与碰撞前):

$$\begin{aligned} P_1: (\dot{x}_+(t_{1+}), \tau(t_{1+})) &\mapsto (\dot{x}_-(t_{2-}), \tau(t_{2-})) \\ P_2: (\dot{x}_-(t_{2-}), \tau(t_{2-})) &\mapsto (\dot{x}_+(t_{2+}), \tau(t_{2+})) \\ P_3: (\dot{x}_+(t_{2+}), \tau(t_{2+})) &\mapsto (\dot{x}_-(t_{3-}), \tau(t_{3-})) \\ P_4: (\dot{x}_-(t_{3-}), \tau(t_{3-})) &\mapsto (\dot{x}_+(t_{1+}), \tau(t_{1+})) \end{aligned} \quad (6)$$

令 DP_1, DP_2, DP_3, DP_4 分别代表 P_1, P_2, P_3, P_4 映射的 Jacobi 矩阵。对于振子与左侧刚性约束碰撞的阶段,由于瞬时碰撞不改变相位,根据碰撞原理可以得到:

$$DP_2 = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于非瞬时碰撞的阶段, Jacobi 矩阵 DP_1, DP_3 和 DP_4 可按式计算:

$$DP_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \end{bmatrix}_{(\dot{x}_0, \tau_0)} \quad \begin{matrix} (i, j = 1, 2) \\ (l = 1, 3, 4) \end{matrix} \quad (8)$$

式中: f_i 表示每个映射的第 i 个分量; X_j 表示每个阶段的初始状态 \dot{x}_0 和 τ_0 。系统每个阶段的 Poincaré 映射表示如下:

$$\begin{cases} f_1(t, \dot{x}_0, \tau_0) = \dot{x} \\ f_2(t, \dot{x}_0, \tau_0) = \omega t + \tau_0 \end{cases} \quad (9)$$

定义函数:

$$\begin{cases} G_l(t, \dot{x}_0, \tau_0) = x(t) + b_1 & (l = 1) \\ G_l(t, \dot{x}_0, \tau_0) = x(t) - b_2 & (l = 3, 4) \end{cases} \quad (10)$$

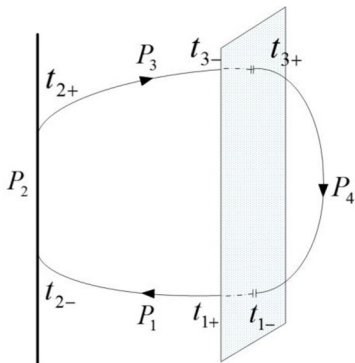


图 2 系统 Poincaré 映射示意图

对式(9)和式(10),利用复合函数求导法则,并运用隐函数定理,可以求得矩阵 DP_l ($l = 1, 3, 4$) 中的各元素:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} - \frac{\partial f_i}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial X_j} / \frac{\partial G}{\partial t} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (11)$$

系统 $n-1-1$ (即 $t_1 + t_2 + t_3 = 2n\pi/\omega$ 时) 周期运动的映射及其对应的 Jacobi 矩阵可表示为:

$$P = P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$$

$$DP = DP_4 \cdot DP_3 \cdot DP_2 \cdot DP_1 \quad (12)$$

Lyapunov 指数谱作为判定动力系统稳定性和混沌特性的工具,是根据系统最大 Lyapunov 指数是否大于零来判定系统处于稳定周期运动状态或混沌运动状态。计算系统的 Lyapunov 指数谱时,首先选择 2 个线性无关的初始扰动 $(\delta x_1^{(0)}, \delta x_2^{(0)})$, 定义 $(\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}) = (\delta x_1^{(0)} / \|\delta x_1^{(0)}\|, \delta x_2^{(0)} / \|\delta x_2^{(0)}\|)$, 以 $(\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)})$ 为初始向量,根据式(9)所求的线性化矩阵 DP ,按 $\delta x^{(k)} = DP(x^{(k-1)}) \cdot \delta x^{(k-1)}$ 进行迭代一次,可得到一个二维向量 $(\delta x_1^{(1)}, \delta x_2^{(1)})$ 。进行下一次迭代前,对此向量采用 Gram-Schmidt 正交化和范式归一化处理,将得到的解向量 $(\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)})$ 作为初始向量并进行下一次迭代。迭代次数为 k 时, Gram-Schmidt 正交化和范式归一化处理方法为:

$$\left. \begin{aligned} v_1^{(k)} &= \delta x_1^{(k)} \\ \mu_1^{(k)} &= v_1^{(k)} / \|v_1^{(k)}\| \\ v_2^{(k)} &= \delta x_2^{(k)} - (\delta x_2^{(k)} \cdot \mu_1^{(k)}) \cdot \mu_1^{(k)} \\ \mu_2^{(k)} &= v_2^{(k)} / \|v_2^{(k)}\| \\ &\vdots \\ v_n^{(k)} &= \delta x_n^{(k)} - (\delta x_n^{(k)} \cdot \mu_1^{(k)}) \cdot \mu_1^{(k)} - \dots \\ &\quad - ((\delta x_n^{(k)} \cdot \mu_{n-1}^{(k)}) \cdot \mu_{n-1}^{(k)} \\ \mu_n^{(k)} &= v_n^{(k)} / \|v_n^{(k)}\| \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

当迭代此时 K 足够大时,便可得到碰撞振动系统的 Lyapunov 指数谱为:

$$\lambda_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ln \|z_i^{(k)}\| \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

3 系统周期运动仿真与分析

考虑系统参数(1): $R = 0.8, \omega = 0.5, \zeta = 0.1, b_2 = 1.396, \mu_k = 10$, 分析图 1 所示碰撞振动系统的稳定性,文中用 $n-p-q$ 表示系统周期运动, n 表示系统力周期数, p 表示振子与左侧刚性约束面碰撞次数, q 表示振子与右侧弹性约束面碰撞次数。当系统最大 Lyapunov 指数小于 0 时,表明相邻轨道间的距离逐渐变小,最终演化为一个点或者一个极限环,此时系统处于稳定周期运动状态。如 $b_1 = 0.5346$ 时,系统处于 $2-7-2$ 稳定周期运动,周期运动相图如图 3(a)

所示、周期吸引子分布图如图3(b)所示。为得到Lyapunov指数谱序列,本文采用10 000次迭代,并将前7 000次迭代略去,得到图3(c)所示Lyapunov指数谱序列图,从图中可得出,当系统处于稳定周期运动状态时,它的两个Lyapunov指数均为负值。

当系统最大Lyapunov指数大于0,表明从相邻点出发的轨道迅速分离,此时系统处于混沌运动状态。如 $b_1 = 0.48$ 时,此时系统处于混沌运动状态,系统混沌运动相图如图4(a)所示、混沌吸引子分布图如图4(b)所示。采用相同迭代方法得到图4(c)所示Lyapunov指数谱序列图,结合图4(c)可知当系统处于混沌运动时,系统两个Lyapunov指数有一个大于0。

为研究一定范围内系统稳定性,选择系统参数(1)不变,取 b_1 作为分岔参数,取值范围 $b_1 \in [0.4078, 0.5712]$ 。系统左侧刚性碰撞面 Σ_{p+} 、定相位面 Σ_n 的单参分岔图以及Lyapunov指数谱图如图5所示,图中GR表示擦边分岔。

由图5可知,在参数 b_1 由大减小的过程中,系统由1-3-1周期运动,在 $b_1 = 0.5556$ 处经擦边分岔转迁为2-7-2周期运动,转迁过程中周期运动相图分别为图6(a)至图6(c),发生擦边分岔时系统对应的Lyapunov指数会发生跳跃现象;当 b_1 进一步减小,经一系列倍周期分岔进入混沌,此时系统最大

Lyapunov指数大于0,混沌运动相图如图6(d)所示;在 $b_1 = 0.5104$ 处系统由混沌运动退化为3-11-3周期运动;随着 b_1 的进一步减小,在 $b_1 = 0.5001$ 处发生鞍结分岔,系统由3-11-3稳定周期运动直接进入混沌,发生鞍结分岔时系统的雅可比矩阵特征值分别为: $\lambda_1 = 1.00056581$ 、 $\lambda_2 = 0.56841259$ 。之后系统经历一个相同序列,由混沌经一系列逆倍周期分岔转迁为稳定周期运动,再由稳定周期运动经鞍结分岔进入混沌,系统由混沌运动经一系列逆倍周期分岔分别转迁为2-8-2周期运动、1-4-1周期运动,周期运动相图分别为图6(e)至图6(f),当系统发生倍周期分岔(逆倍周期分岔)时,系统对应的最大Lyapunov指数为0。参数 b_1 由小增大的转迁方式与 b_1 减小时的转迁方式相图,该参数条件下不存在相邻周期运动间的共存现象,故不再详细说明。

选取系统参数(2): $R = 0.8$ 、 $\omega = 0.5$ 、 $\zeta = 0.1$ 、 $b_1 = 0.3282$ 、 $\mu_k = 10$,取 b_2 作为分岔参数,在 $b_2 \in [1.55, 1.632]$ 范围内双向变化,系统刚性碰撞面分岔图及最大Lyapunov指数图如图7所示。图中SN表示鞍结分岔,BC表示边界激变,红色曲线表示 b_2 由大减小时Lyapunov最大指数值,蓝色表示 b_2 由小增大时最大Lyapunov指数值。

在相邻周期运动相互转迁时,由于发生不同类型分岔的参数点不在同一位置,导致转迁过程不可

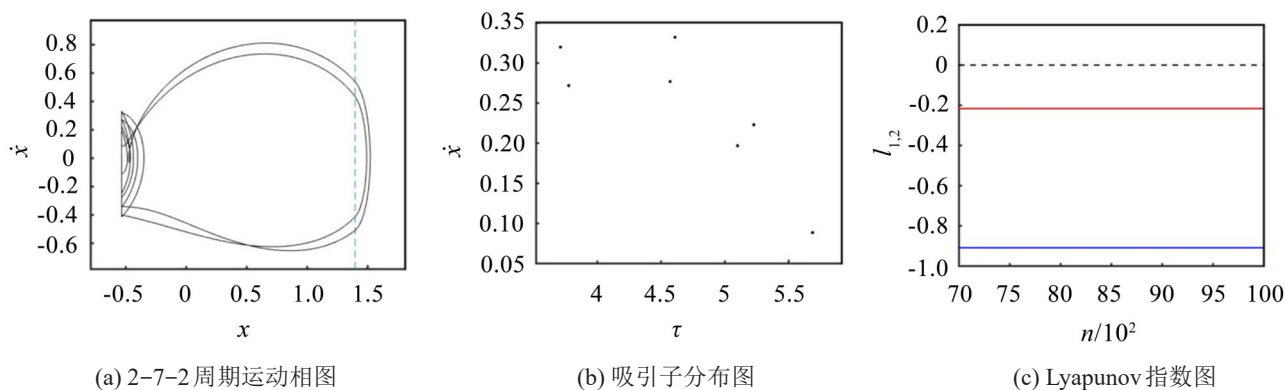


图3 2-7-2稳定周期运动

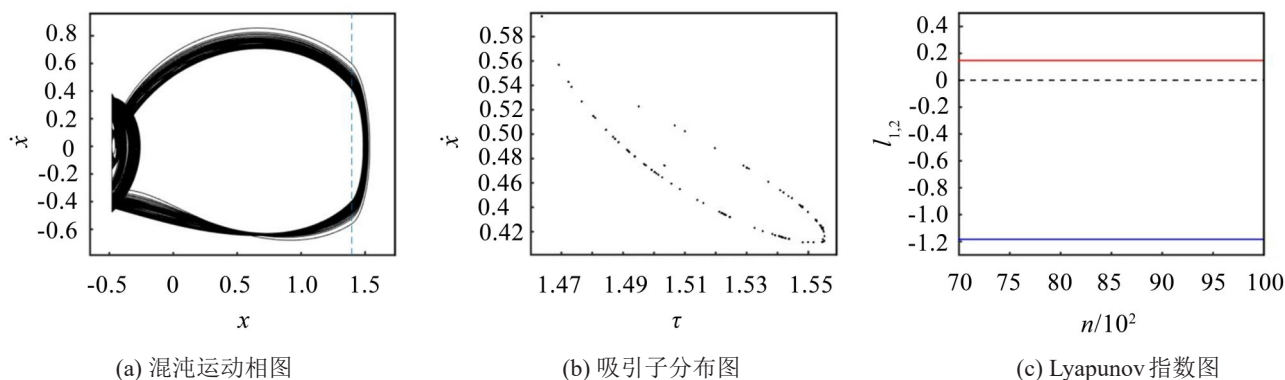


图4 混沌运动

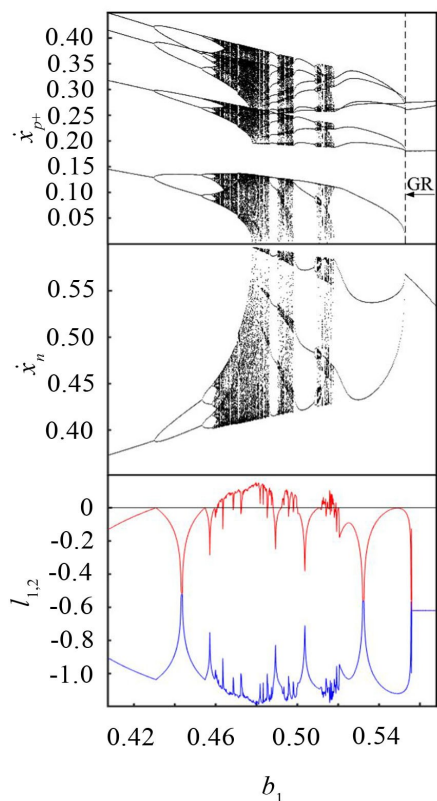


图5 系统单参分岔图及Lyapunov指数谱

逆,这样在相邻周期运动转迁过程中就会形成由这两个相邻周期运动稳定共存的多态共存区。当 b_2 由大减小时,系统由1-3-0周期运动在 $b_2 = 1.6083$ 处经鞍结分岔进入混沌,此时系统最大Lyapunov指

数值等于0,同时系统映射的Jacobi矩阵特征值 $\lambda_1 = 1.000\ 035\ 81$ 、 $\lambda_2 = 0.154\ 598\ 25$,之后随着 b_2 减小系统由混沌进入2-7-1周期运动。当 b_2 由小增大时,系统由2-7-1周期运动进入混沌,在 $b_2 = 1.6135$ 处经边界激变由混沌运动转迁为1-3-0周期运动,此时系统最大Lyapunov指数值等于0。由于发生鞍结分岔和边界激变的参数点不在同一位置,这样在 $b_2 \in [1.6083, 1.6135]$ 范围内就会由混沌运动与1-3-0周期运动稳定共存。结合Lyapunov指数谱图加以验证,在 $b_2 \in [1.6083, 1.6135]$ 范围内减小时系统最大Lyapunov指数始终大于0,表明系统处于混沌运动状态;在该范围内增大时系统最大Lyapunov指数始终小于0,表明系统处于稳定周期运动状态。同时结合系统运动相图(图8)也可得出,在同一参数条件下,系统同时存在稳定周期运动(红色曲线)和混沌运动(蓝色曲线)。

4 结 语

本文以单自由度含不同约束碰撞振动系统为研究对象,通过建立系统的Poincaré映射,将系统转换为离散系统,并利用Gram-Schmidt正交化和范式归一化方法,得到了系统的Lyapunov指数谱,结论如下:

(1) 利用Lyapunov指数谱可精确判别系统的稳定周期运动与混沌运动,还可确定发生不同类型分

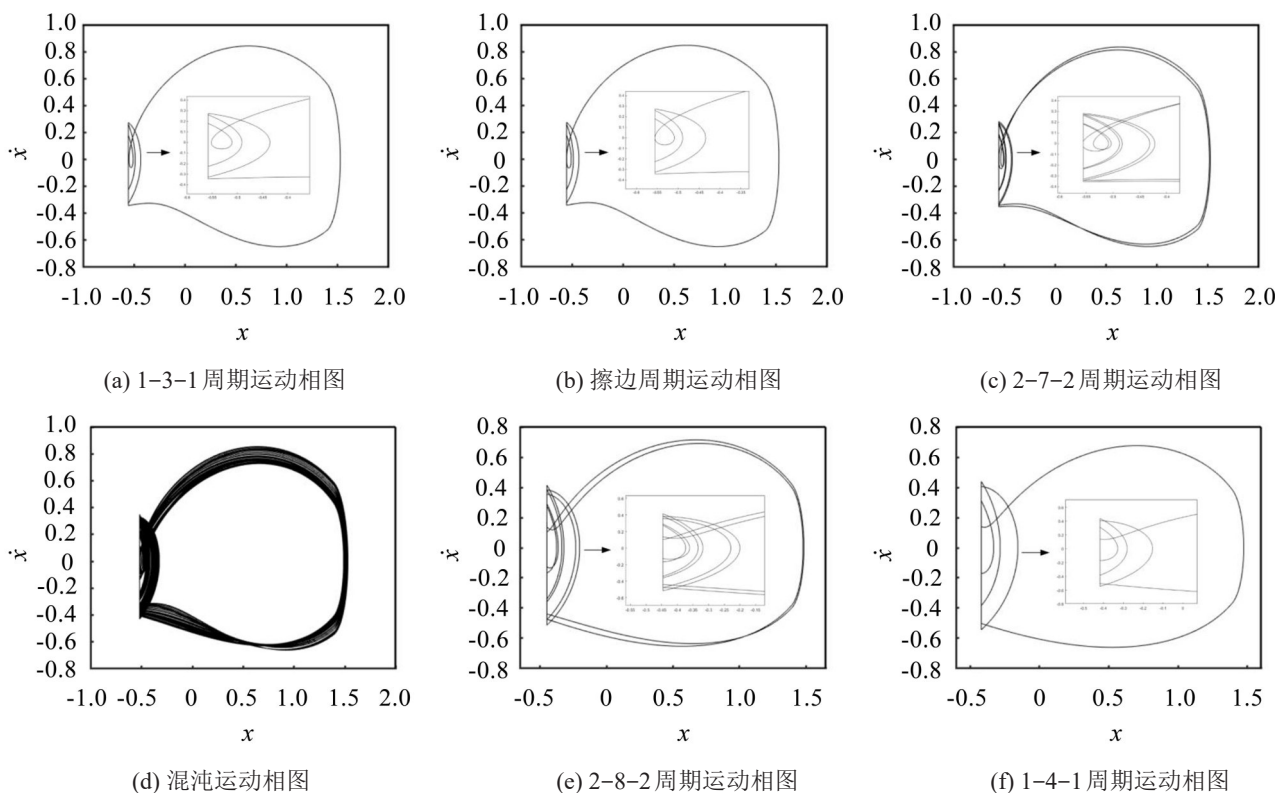


图6 系统周期运动相图

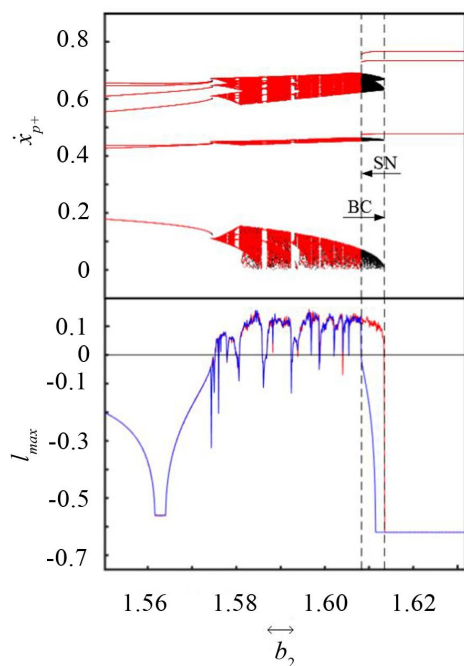


图7 系统单参分岔图及最大Lyapunov指数谱

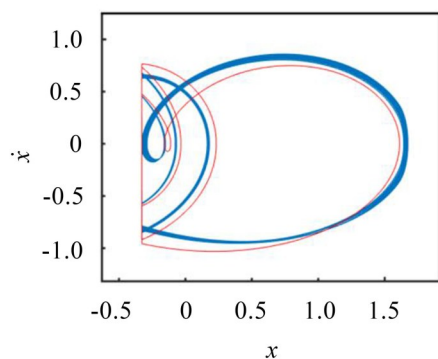


图8 周期共存相图

岔时的参数位置。

(2) 由于擦边分岔、鞍结分岔和边界激变的出现,导致相邻周期运动相互转迁过程不可逆,从而形成多态共存区,利用Lyapunov指数谱可甄别多态共存区中的混沌运动与周期运动。

(3) 在间隙 b_1 和 b_2 变化的过程中,两侧间隙分别增大时系统都会由稳定周期运动经历一系列倍周期分岔进入混沌;当 b_1 减小时系统会由稳定周期运动经一系列不稳定擦边分岔进入混沌,当 b_2 减小时系统会由稳定周期运动经鞍结分岔直接进入混沌,并且会导致由稳定周期运动与混沌运动共存的多态共存区。

参考文献:

- [1] PAVLOVSKAIA E, WIERCIGROCH M, GREBOGI C. Modeling of an impact system with a drift[J]. Physical Review E, 2001, 64(5): 056224.
- [2] 丁旺才,谢建华. 碰撞振动系统分岔与混沌的研究进展[J]. 力学进展, 2005(4): 513-524.
- [3] DE SOUZA S L T, WIERCIGROCH M, CALDAS I L, et al. Suppressing grazing chaos in impacting system by structural nonlinearity[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(3): 864-869.
- [4] 丁千,翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展[J]. 力学进展, 2013, 43(1): 112-131.
- [5] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields [J]. Journal Appl. Mech, 1984, 51(4): 947.
- [6] DEVANEY R L. Practical numerical algorithms for chaotic systems(TS Parker and LO chua) [J]. SIA M Review, 1990, 32(3): 501-503.
- [7] DE SOUZA S L T, CALDAS I L. Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(3): 569-579.
- [8] JIN L, LU Q S, TWIZELL E H. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents by local maps in non-smooth impact-vibrating systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(4-5): 1019-1033.
- [9] 金俐,陆启韶. 非光滑动力系统Lyapunov指数谱的计算方法[J]. 力学学报, 2005(1): 40-47.
- [10] 魏艳辉,徐洁琼,黄龙生. 两自由度碰撞振动系统的Lyapunov指数谱分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(1): 60-63+195.
- [11] 张惠,丁旺才,李飞. 两自由度含间隙和预紧弹簧碰撞振动系统动力学分析[J]. 工程力学, 2011, 28(3): 209-217.
- [12] 吕小红,罗冠炜. 碰撞振动系统Lyapunov指数谱的计算[J]. 兰州交通大学学报, 2012, 31(3): 161-164.
- [13] 侯俊霞,吕全义,曹方颖,等. 一种求解大型Lyapunov矩阵方程的预处理并行算法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(5): 454-461.
- [14] 李得洋,丁旺才,丁杰,等. 基于Lyapunov指数的弹性约束碰振系统的稳定性分析[J]. 兰州交通大学学报, 2020, 39(3): 89-95.
- [15] 丁杰,王超,丁旺才,等. 双侧不同约束碰振系统的周期运动转迁规律[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2020, 49(1): 6-11.