

文章编号:1006-1355(2021)06-0063-04

# 基于非线性能量阱的弹性支承梁振动抑制

符翔, 彭剑, 童俊辉, 颜世军

(湖南科技大学 土木工程学院 结构抗风与振动抑制湖南省重点实验室, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:**弹性支承梁易在外部荷载作用下发生大幅振动,本文采用非线性能量阱技术,对弹性支承梁的非线性共振响应的振动抑制开展研究。基于Hamilton原理,建立非线性能量阱与弹性支承梁的耦合运动方程。通过数值仿真分析,研究不同参数条件下非线性能量阱的振动抑制效果,利用能量法研究非线性能量阱对主结构振动抑制的能量消耗。结果表明:非线性能量阱的运用使系统响应幅值显著下降;随着时间增长,系统总能量大幅下降并趋于稳定,非线性能量阱能实现对弹性支承梁的有效振动抑制。

**关键词:**振动与波;弹性支承梁;非线性能量阱;振动抑制;能量法

**中图分类号:**O322;O328

**文献标志码:**A

**DOI编码:**10.3969/j.issn.1006-1355.2021.06.011

## Vibration Mitigation of Elastically Supported Beams Based on Nonlinear Energy Sink

FU Xiang, PENG Jian, TONG Junhui, YAN Shijun

(Hunan Provincial Key Laboratory of Structures for Wind Resistance and Vibration Control,  
School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology,  
Xiangtan 411201, Hunan, China)

**Abstract:** Elastically supported beams are prone to develop large-scale vibration under external loads. In this paper, the vibration mitigation of the nonlinear principal resonance response of the elastically supported beams is investigated via nonlinear energy sink (NES). Based on Hamiltonian principle, the coupled motion equation of NES and the elastically support beam is established. Through numerical simulation, the vibration reduction effects of NES with different parameters are compared. The energy consumption and vibration suppression of the main structure under NES is studied using energy method. The results show that when using NES, the response amplitude of the system is significantly suppressed; as time increases, the total energy of the system decreases significantly and tends to stable; reasonable selection of parameters of NES can improve the efficiency of vibration control for the elastically supported beams.

**Key words:** vibration and wave; elastically supported beam; nonlinear energy sink; vibration mitigation; energy method

梁结构作为基本构件广泛应用于工程结构,其在外部荷载和环境作用下易发生大幅振动。特别是在大跨度斜拉桥中,梁结构的振动往往会导致斜拉索的大幅振动,能量在各子结构之间传递,易激发系统的大幅振动。因此,梁的振动抑制成为实际工程中的亟需解决的问题之一<sup>[1]</sup>。

振动抑制技术中常见的方法为附加阻尼装置,其中的调谐质量阻尼器(Tuned mass damper, TMD)工作频带较窄,对激励的响应不敏感,当子系统能量积累至一定值时,TMD才能对主结构振动起到抑制效果,当结构阻尼比较大时,TMD的抑制效果下降<sup>[2]</sup>。而非线性能量阱(Nonlinear energy sink, NES)由于具有质轻、工作频带宽、能量单向传递等优点,在振动控制领域得到学者的广泛关注。工作原理为多自由度非线性振动系统在特定条件下会出现靶向能量传递现象(Targeted energy transfer, TET)<sup>[3]</sup>,或者能量泵浦现象(Energy pump)现象<sup>[4]</sup>,从而可实现非线性振动系统的减振<sup>[5-6]</sup>。王杰<sup>[7]</sup>等针对一种新型非线性微振动流体隔振器的Octo-strut平台,对其振动耦合性、安全冗余性等动力学特性进行了理论分析

收稿日期:2021-01-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51778228);湖南省教育厅资助项目(19B192,19C0752)

作者简介:符翔(1995-),男,湖南省湘潭市人,硕士研究生,主要研究方向为非线性振动抑制。

通信作者:彭剑(1982-),男,湖南省邵阳市人,副教授,博士,硕士生导师,研究方向为非线性振动理论与振动抑制。

E-mail: pengjian@hnu.edu.cn

和数值仿真验证。张新华和曹保锋<sup>[8]</sup>基于非线性模态动力学理论,针对一个两自由度非线性振动系统,给出了其频能图以及内共振情形下的局部化非线性模态。Yao等<sup>[9]</sup>研究了接地NES对转子系统的减振问题。Tian等<sup>[10]</sup>研究了利用NES对三维梯形机翼的非线性气动弹性行为的振动抑制问题。李爽等<sup>[11]</sup>研究舰船设备受外部冲击激励扰动时NES的振动抑制效果。刘良和张伟<sup>[12]</sup>利用NES对在航空航天领域应用广泛的悬臂矩形板进行减振研究。王菁菁等<sup>[13]</sup>对一个两自由度主体结构附加SSVI轨道NES进行了理论分析、数值优化和试验验证。刘涛等<sup>[14]</sup>通过线性减振弹簧构建具有NES的Duffing振子,提出一种切实可行的NES减振系统构建方法。Geng等<sup>[15]</sup>提出了带有分段线性弹簧的有限非线性能量吸收器。Gomez等<sup>[16]</sup>开展了基于NES的结构系统地震响应振动抑制的优化设计研究。

本文在现有研究基础上,利用NES技术的优势,采用NES对弹性支承梁进行振动抑制研究,分析了在不同参数下,弹性支承梁的非线性主共振动力响应。基于能量法则,得到了弹性支承梁及NES耗散能量随时间变化的关系图,分析了NES的能量耗散效果。

## 1 数学模型及控制方程

图1为轴力作用下弹性支承梁,并附加NES进行振动抑制。其中梁假定为Euler-Bernoulli梁,不可伸长且忽略其扭转和剪切变形。

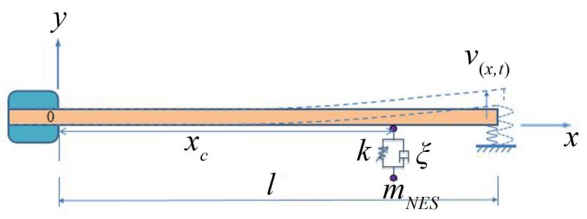


图1 附加NES弹性支承梁振动抑制系统示意图

基于Hamilton原理,考虑轴力、弹性支座和外激励作用,可得受控梁的运动方程为<sup>[17-18]</sup>:

$$m\ddot{v} + c\dot{v} - EAp(t)v'' + Elv''' + k_c v \delta(x-l) - \frac{EA}{2l} v'' \int_0^l v'^2 dx = [k(v(x,t) - y(t))^3 + \xi(\dot{v}(x,t) - \dot{y}(t))]\delta(x-x_c) + f \cos(\Omega t) \quad (1)$$

$$m_{NES} \ddot{y}(t) - [k(v(x_c, t) - y(t))^3 + \xi(\dot{v}(x_c, t) - \dot{y}(t))] = 0 \quad (2)$$

边界条件为:

$$v(0, t) = 0, v'(0, t) = 0, v''(l, t) = 0 \quad (3)$$

$$Elv'''(l, t) + k_c v(l, t) = 0$$

其中: $v$ 和 $y$ 分别表示受控梁和NES的位移, $m$ 、 $c$ 分别表示梁的线密度、阻尼, $E$ 为梁的弹性模量, $A$ 为梁的横截面积, $l$ 为梁的长度, $p(t)$ 为轴向作用力, $k_c$ 为梁的弹性刚度系数, $I$ 为截面惯性矩, $f$ 、 $\Omega$ 分别为外激励的幅值和频率, $k$ 、 $\xi$ 、 $m_{NES}$ 分别表示非线性能量阱的非线性刚度、阻尼系数和质量, $\delta$ 是Kronecker函数。

运用Galerkin方法对位移函数 $v(x, t)$ 进行展开:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (4)$$

其中: $\phi_n(x)$ 为振型函数,表达式如下<sup>[17]</sup>:

$$\phi_i(x) = A_i \left[ \cos \delta_i x - \cosh \varepsilon_i x - \sigma \left( \sin \delta_i x - \frac{\delta_i}{\varepsilon_i} \sinh \varepsilon_i x \right) \right],$$

$$\sigma_i = \frac{\delta_i^2 \cos \delta_i l + \varepsilon_i^2 \cosh \varepsilon_i l}{\delta_i^2 \sin \delta_i l + \varepsilon_i \delta_i \sinh \varepsilon_i l},$$

$$\delta_i = \sqrt{(r_i + g^4/4)^{1/2} + g^2/2},$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{(r_i + g^4/4)^{1/2} - g^2/2} \quad (5)$$

其中: $r_i$ 由以下超越方程给出:

$$El\delta_i^5 + El\varepsilon_i^4 \delta_i + 2El\varepsilon_i^2 \delta_i^3 \cos \delta_i l \cosh \varepsilon_i l + El(\varepsilon_i \delta_i^4 - \varepsilon_i^3 \delta_i^2) \sin \delta_i l \sinh \varepsilon_i l - k(\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) \sin \delta_i l \cosh \varepsilon_i l + k(\delta_i^3/\varepsilon_i + \varepsilon_i \delta_i) \cos \delta_i l \sinh \varepsilon_i l = 0 \quad (6)$$

将式(4)代入式(1)、式(2),并进行Galerkin积分,可以得到:

$$\ddot{q}(t) + \mu \dot{q}(t) + \omega_n^2 q(t) + \Gamma_{nnnn} q^3(t) = [k(q(t) - y(t))^3 + \xi(\dot{q}(t) - \dot{y}(t))]\phi(x_c) + f \cos(\Omega t) \quad (7)$$

$$\varepsilon \ddot{y}(t) - [k(\phi(x_c)q - y(t))^3 + \xi(\phi(x_c)\dot{q} - \dot{y}(t))] = 0 \quad (8)$$

其中:

$$\mu = \frac{c}{m}, \Gamma_{nnnn} = -\frac{EA}{2ml} \int_0^l \phi_n''(x) \phi_n(x) \int_0^l \phi_n'(x) \phi_n'(x) dx dx,$$

$$\varepsilon = \frac{m_{NES}}{m}.$$

## 2 数值仿真

本节研究不同参数下NES对弹性支承梁的非线性主共振的振动抑制效果,即 $\Omega = \omega_n + \sigma$ , ( $\sigma$ 为调谐参数)。运用能量法对受迫激励下系统总能量、NES耗散的能量、外部输入能量进行分析。梁的几何尺寸和材料特性参数选取如下:

$$l = 99.62 \times 10^{-2} m, A = 15.36 \times 10^{-4} m^2, E = 34.5 \text{ GPa}, I = 9.8662 \times 10^{-8} m^4, k_c = 6.872 \times 10^4 \text{ N/m}, m = 4.4 \text{ kg/m}.$$

根据能量准则<sup>[2, 18]</sup>,系统总能量为:

$$E^{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} \varepsilon \dot{y}^2(t) + \frac{1}{2} \omega_n^2 q^2(t) + \frac{1}{4} k [\phi(x_c) q(t) - y(t)]^4 \quad (9)$$

输入能量是总能量在零时刻的值与外部激励提供的能量的总和,其表达式为:

$$E^{\text{Input}}(t) = E^{\text{tot}}(0) + W^F(t) \quad (10)$$

其中:

$$W^F(t) = \int_0^t f[\phi(x_c) \dot{q} - \dot{y}] \cos \Omega t \, dt \quad (11)$$

NES耗散的能量为:

$$E_d^{\text{NES}} = \xi \int_0^t [\phi(x_c) \dot{q}(t) - \dot{y}(t)]^2 \, dt \quad (12)$$

假定  $\mu=0.012$ ,  $f=0.008$ 。取NES参数为:  $k=10$ ,  $\xi=0.06$ ,  $\sigma=0.46$ ,  $x_c=L/4$ , 比较NES质量比  $\varepsilon$  对结构响应的影响, 分别取  $\varepsilon$  为 0.05、0.1 和 0.2, 得到梁的响应曲线如图2所示。

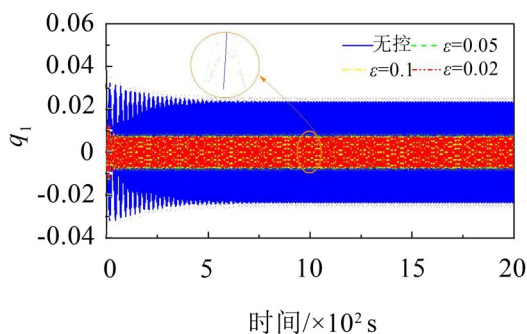


图2 不同  $\varepsilon$  值下带NES主共振响应对比图

设定  $\varepsilon=0.01$ ,  $x_c=L/8$ , 其他参数不变, 分析非线性刚度对结构的影响。取NES的非线性刚度系数为 100、300 和 500, 得到3种取值下的主结构响应如图3所示。图2是不同  $\varepsilon$  值、 $k$  值下附加了NES的弹性支承梁时程曲线。从中可知, NES质量越大, 其减振效果更好。而从图3中可以发现, 随着非线性刚度的改变, 梁的振动幅值变化并不明显。

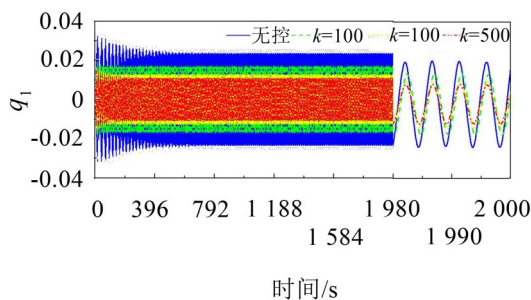


图3 不同  $k$  值下带NES主共振响应对比图

取不同阻尼系数值  $\xi=0.05$ 、 $0.07$ 、 $0.09$ , 设定  $k=100$ ,  $\varepsilon=0.01$ ,  $x_c=L/4$ , 弹性支承梁在不同阻尼系数下的响应曲线如图4所示。可以看出NES的阻尼

对主结构减振起到主要作用, 阻尼比越大效果较好。

设定  $\xi=0.06$ ,  $\varepsilon=0.01$ ,  $k=200$ , 得到NES处于梁不同位置时的主结构响应如图5所示。可以得知, NES在梁的  $L/8$  和  $L/4$  处的减振效果比  $L/2$  处的更好。从图4和图5可以看出, 当NES参数选取合理时, NES减振效果显著。

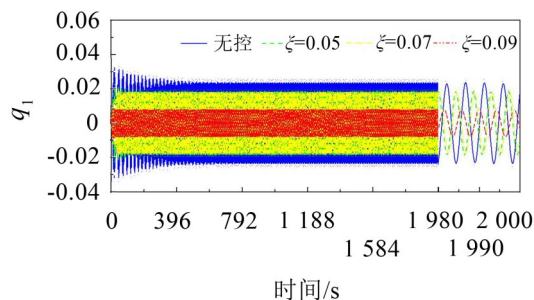


图4 不同  $\xi$  值下带NES主共振响应对比图

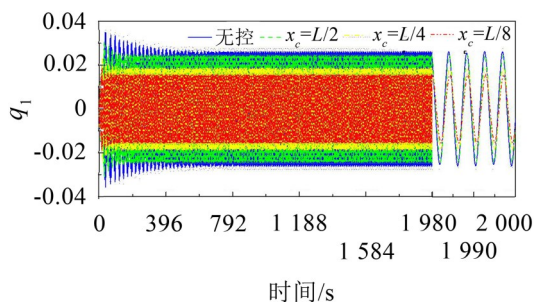


图5 NES不同安装位置时主共振响应对比图

图6为系统能量图。输入能量、总能量和NES消耗能量之间的关系是  $E^{\text{tot}} = E^{\text{Input}} - E_d^{\text{NES}}$ 。其中,  $E^{\text{tot}}$  为系统总能量,  $E_d^{\text{NES}}$  为NES耗散能量,  $E^{\text{Input}}$  为输入能量。总系统在附加NES的情况下, 能量明显减少。输入能量和总能量的走势大致相同, NES消耗的能量在  $t=10$  s时有一个小高峰, 之后趋于平稳, NES对主结构振动起到了明显抑制作用。

### 3 结语

本文研究了NES作用下弹性支承梁主共振的振动抑制, 运用能量法分析得到了该系统能量变化规律。通过数值仿真, 得出结果如下:

- (1) 采用NES可以有效抑制其大幅振动, 其主共振响应受非线性能量各参数影响;
- (2) 调整NES非线性刚度、阻尼、质量和位置, 可以得到较好的振动抑制效果;
- (3) 非线性刚度和质量对减振幅值影响较小, 仅使时程曲线产生偏移, 幅值上没有明显变化。起主要抑制振动作用的元器件是阻尼部分, 由结果可以看出, 随着阻尼比增大, 减振效果越来越好。

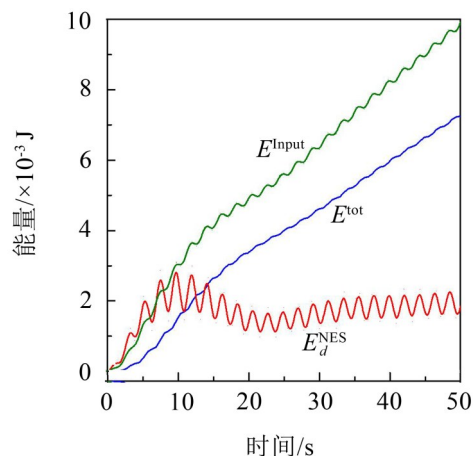


图6 系统能量图

## 参考文献:

- [1] ANTHONY D K, ELLOITT S J. Comparison of the effectiveness of minimizing cost function parameters for active control of vibrational energy transmission in a lightly damped structure[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(2): 223-244.
- [2] 谭平, 潘兆东, 王磊, 等. 基于能量原理的TMD系统减震性能分析[J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(3): 43-49.
- [3] KOPIDAKIS G, AUBRY S, TSIRONIS G P. Targeted energy transfer through discrete breathers in nonlinear systems[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(16): 165501.
- [4] GENDELMAN O V. Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators[J]. Nonlinear Dynamics, 2001, 25(1): 237-253.
- [5] GENDELMAN O, MANEVITCH L I, VAKAKIS A F, et al. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 34-41.
- [6] VAKAKIS A F, GENDELMAN O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II—Resonance capture[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 42-48.
- [7] 王杰, 田蕾, 苟仲秋, 等. 基于非线性微振动流体阻尼隔振器的Octo-strut隔振平台的动力学特性研究[J]. 应用力学学报, 2020, 37(3): 928-937.
- [8] 张新华, 曹保锋. 非线性振动系统的能量传递机理[J]. 应用力学学报, 2013, 30(6): 839-844.
- [9] YAO H, CAO Y, DING Z, et al. Using grounded nonlinear energy sinks to suppress lateral vibration in rotor systems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 124: 237-253.
- [10] TIAN W, LI Y, LI P, et al. Passive control of nonlinear aeroelasticity in hypersonic 3-D wing with a nonlinear energy sink[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 462: 114942.
- [11] 李爽, 楼京俊, 刘树勇, 等. 冲击激励下非线性能量阱振动抑制效果分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2019, 47(10): 87-92.
- [12] 刘艮, 张伟. 非线性能量阱在悬臂薄板振动抑制中的应用研究[J]. 振动工程学报, 2019, 32(5): 786-792.
- [13] 王菁菁, 浩文明, 吕西林. 单边碰振轨道非线性能量阱减震性能及碰撞参数研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(16): 64-70.
- [14] 刘涛, 张勇, 陈沛芝, 等. 基于增维精细积分法非线性能量陷减振系统分析[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(5): 215-219.
- [15] GENG X, DIN H, MAO X, et al. Nonlinear energy sink with limited vibration amplitude[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 156: 107625.
- [16] GOMEZ F, FERNANDOIS G A, SPENCER JR B F. Optimal design of nonlinear energy sinks for mitigation of seismic response on structural systems[J]. Engineering Structures, 2021, 232: 111756.
- [17] 彭剑, 赵冰, 王连华. 时滞反馈及轴力作用下弹性梁的非线性振动[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(9): 0-36.
- [18] NAYFEH A H. Linear and nonlinear structure mechanics [M]. New York: Wiley Interscience, 2004.