文章编号：1006-1355(2021)05-0072-08

一类含干摩擦弹性碰撞系统的动力学特性分析

安贵杰，刘俊杰，闫 哲，张有强

（塔里木大学 机械电气化工程学院，新疆维吾尔自治区现代农业工程重点实验室，
新疆维吾尔自治区 阿拉尔 843300）

摘 要：建立一类含间隙和干摩擦单自由度弹性碰撞振动系统的动力学模型，分析推导系统运动过程，定义两类Poincaré映射，利用数值仿真方法，研究激振频率、摩擦系数及阻尼系数对系统动力学特性的影响。结果表明：在低频区域内，系统以颤碰运动为主，当摩擦系数增大时，其粘滞运动的范围有所增大；随着阻尼系数的增加，系统的混沌运动区域明显减少，其稳定性有所提高，可为此类系统的参数优化和稳定性分析提供一定的理论参考。

关键词：振动与波；摩擦；粘滞；滑移；颤振；分岔

中图分类号：TH113；O322 **文献标志码**：A **DOI编码**：10.3969/j.issn.1006-1355.2021.05.012

Dynamic Feature Analysis of Elastic Collision Systems with Dry Fiction

AN Guijie, *LIU Junjie*, *YAN Zhe*, *ZHANG Youqiang*

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Tarim University, Key Laboratory of Modern Agricultural Engineering of Xinjiang Uygur Autonomous Region, Alar 843300, , Xinjiang, China)

Abstract : The dynamic model of a single-DOF elastic collision vibration system with clearance and dry friction was established. The motion process of the system was analyzed and derived. Two kinds of Poincare mapping were defined and the influence of excitation frequency, friction coefficient and damping coefficient on the dynamic characteristics of the system was studied by using numerical simulation method. The results show that flutter collision is the main motion in the low frequency region, and the viscous motion range increases with the increase of friction coefficient. With the increase of damping coefficient, the chaotic motion area of the system decreases obviously and the stability of the system is improved. This study may provide some theoretical reference for the parameter optimization and stability analysis of such systems.

Key words : vibration and wave; friction; sticking; slipping; scattering-impact; bifurcation

间隙和干摩擦广泛存在于无润滑且有相对滑移的机械零部件之间，在外激励的作用下零部件之间出现持续反复的摩擦振动与冲击，产生噪声和磨损，降低设备的精度和服役寿命。研究含间隙和摩擦共存的碰撞振动系统动力学特性，对此类系统的动力学优化设计和系统稳定性都有着非常重要的意义。

目前国内外学者对含间隙和摩擦碰撞振动系统做了大量的研究，Luo等[1]以周期激励下的2自由度刚性碰撞系统为研究对象，分析了周期运动的多样性及其演化规律，重点揭示了系统动力学特性与关键参数之间的匹配规律。Ashesh Saha等[2]详细研究了两种摩擦模型对单自由度摩擦振动系统响应的影响，分析了当两种摩擦模型通过Hopf分岔改变时，系统的状态是稳定的。Chen等[3]对含干摩擦机械系统的全局动力学行为进行了详细的分析。张有强等[4]研究了含干摩擦刚性碰撞振动系统的动力学特性，发现摩擦力较小时，系统的运动呈现混沌行为，摩擦力较大时，系统从混沌运动逐渐趋于稳定的周期运动，同时，系统运动在不同区域对摩擦力的敏感程度不同。丁旺才等[5]对含干摩擦振动系统的非线性动力学响应进行数值仿真，并以Lyapunov指数为判定依据，详细分析了系统的稳定性。王晓笋等[6]对含碰撞平面摩擦系统的滑移-粘滞转换，提出一种半解析半数值新算法，精确地获取系统粘滞-滑移转换

收稿日期：2021－01－04

基金项目：新疆生产建设兵团科技攻关资助项目（2018AB007）

作者简介：安贵杰（1993－），男，甘肃省陇南市人，硕士研究生，研究方向为非线性动力学。
E-mail: 1481772213@qq.com

通信作者：张有强（1980－）男，甘肃省定西市人，教授。
E-mail: zhangyqlzjd@126.com

及碰撞的位置和时刻，有效降低累积积分误差，提高求解精度。张艳龙等[7-8]研究传送带表面粗糙度对整个振动系统动力学行为的影响，引入Dankowicz摩擦模型，通过数值模拟探讨了非光滑振动系统在滑移-粘滞-碰撞接触-颤振之间转换的动力学行为。吴丹等[9]通过研究一类对称间隙的干摩擦弹性碰撞振动系统，分析了系统在频域上的两尺度簇发振荡规律。朱喜峰等[10]对2自由度含间隙弹性碰撞系统进行研究，分析了间隙和激振频率对系统动力学特性的影响，在一定参数条件下，总结了系统从周期运动到颤碰运动的转迁规律。吕小红等[11]以2自由度含间隙弹性碰撞振动系统为研究对象，通过定义两类Poincaré映射识别周期运动的类型，着重分析了系统在低频区域的分岔特性，揭示系统周期振动模式类型的多样性和转迁特征。安贵杰等[12]对含间隙和干摩擦因素共存下的三类不同碰撞振动系统进行了研究，结合数值仿真法，分析了各参数变化对系统动力学特性的影响。基于以上论述，本文以一类含间隙和干摩擦单自由度弹性碰撞振动系统为研究对象，建立系统的力学模型，定义两类Poincaré映射，通过数值模拟探讨系统周期冲击振动的转迁规律，分析激振频率、摩擦系数、阻尼系数及定频率下阻尼系数变化对系统动力学特性的影响。

1　力学模型及运动微分方程

1.1　模型建立

图1为含间隙和干摩擦单自由度弹性碰撞振动系统的力学模型，质量为$\boldsymbol{M}$的质块由刚度系数为$\boldsymbol{K}_1$的线性弹簧和阻尼系数为C_1的线性阻尼器连接于支承，质块的位移用X表示，右端为一个刚度系数为$\boldsymbol{K}_2$的弹性约束，该约束与质块的初始间隙为B。质块与皮带非光滑接触，系统振动过程中，质块与皮带存在摩擦力F_f，并受简谐激振力$P\sin(\Omega T+\tau)$的作用，其中：P为简谐激励力幅值，Ω为激励频率，T为时间，τ为初始相位，以系统静平衡位置为坐标原点建立坐标系，质块在激振力的作用下做水平方向的运动，当质块M速度和皮带运行速度相等，并且质块所受的简谐激振力、弹簧弹性力和阻尼力ΔF小于其所受的摩擦力时，质块和皮带粘滞在一起，直到质块所受合力ΔF大于其所受摩擦力时粘滞结束，质块重新回到滑移状态。

1.2　运动微分方程

根据以上描述，系统的运动微分方程为：

$$\boldsymbol{M}\ddot{X}+\boldsymbol{C}_1\dot{X}+\boldsymbol{K}_1X+F_f+F_P(X)=P\sin(\Omega T+\tau)\quad(1)$$

式中：

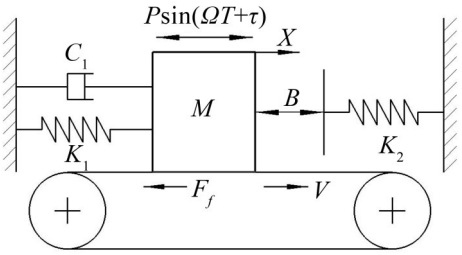


图1　系统动力学模型

$$F_f\begin{cases}=\mu\boldsymbol{M}g & \dot{X}>V\\ \in[-\mu\boldsymbol{M}g,\mu\boldsymbol{M}g] & \dot{X}=V\\ =-\mu\boldsymbol{M}g & \dot{X}<V\end{cases}\quad(2)$$

$$F_P(X)=\begin{cases}\boldsymbol{K}_2(X-B) & X>B\\ 0 & X\leqslant B\end{cases}$$

引入无量纲变换如下：

$$x=\frac{\boldsymbol{K}_1X}{P},\ t=T\sqrt{\frac{\boldsymbol{K}_1}{\boldsymbol{M}}},\ \zeta=\frac{\boldsymbol{C}_1}{2\sqrt{\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{M}}},\ \delta=\frac{\boldsymbol{K}_1B}{P}\omega=\Omega\sqrt{\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{K}_1}},\ \mu_k=\frac{\boldsymbol{K}_2}{\boldsymbol{K}_1},\ v=\frac{V\sqrt{\boldsymbol{M}\boldsymbol{K}_1}}{P},\ f_\mu=\frac{\mu\boldsymbol{M}g}{P}$$

无量纲后系统微分方程为：

$$\ddot{x}+2\zeta\dot{x}+x+f_f+f_p(x)=\sin(\omega t+\tau)\quad(3)$$

$$f_f\begin{cases}=f_\mu & \dot{x}>v\\ \in[-f_\mu,f_\mu] & \dot{x}=v\\ =-f_\mu & \dot{x}<v\end{cases}\quad f_p(x)=\begin{cases}\mu_k(x-\delta) & x>\delta\\ 0 & x\leqslant\delta\end{cases}\quad(4)$$

在运动过程中，由于间隙和干摩擦因素的存在，其动力学行为十分复杂。当$x\leqslant\delta$时，此时只考虑干摩擦对系统的影响，随着激振力不断变化，当$x>\delta$时，质块与右侧弹性约束发生碰撞接触，质块的运动状态在滑移、粘滞及碰撞之间相互转换，根据质块的受力情况，将系统的运动过程分类讨论，质块的振动合力为系统激振力、阻尼和弹簧产生的力、右侧碰撞产生的约束力的总体合力，其中不包含所受的摩擦力。

(a) $\dot{x}\neq v$，$\dot{x}\neq 0$，质块的振动合力满足：

$$f_f<|\sin(\omega t+\tau)-f_p(x)-2\zeta\dot{x}-x|$$

此时质块处于滑移状态，其运动微分方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\sin(\omega t+\tau)-f_p(x)-f_f-2\zeta\dot{x}-x\end{cases}\quad(5)$$

(b) $\dot{x}=v$，质块的振动合力满足：

$$f_f\geqslant|\sin(\omega t+\tau)-f_p(x)-2\zeta\dot{x}-x|$$

质块和皮带粘滞在一起，此时质块处于粘滞状态，系统运动微分方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{y}=0\end{cases}\quad(6)$$

直至下式满足系统恢复方程(5)时：

$$f_f<|\sin(\omega t+\tau)-f_p(x)-2\zeta\dot{x}-x|$$

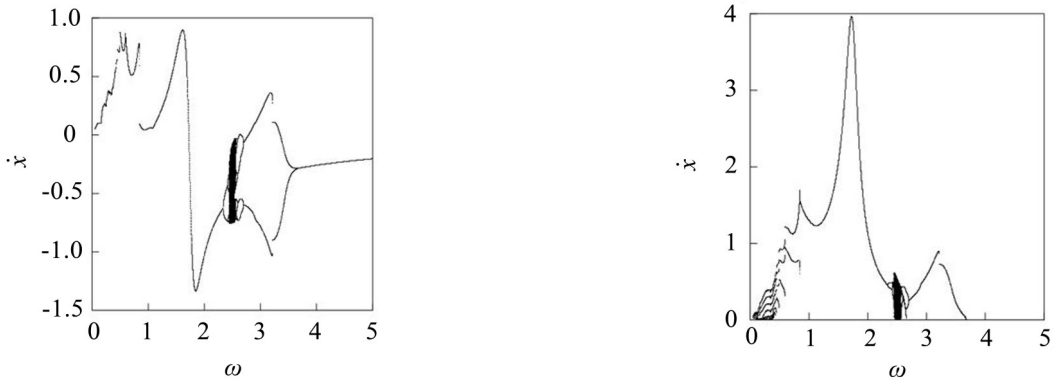
2　数值仿真

2.1　激振频率对系统动力学特性影响

用符号p/n分析系统的动力学特性，其中，n表示

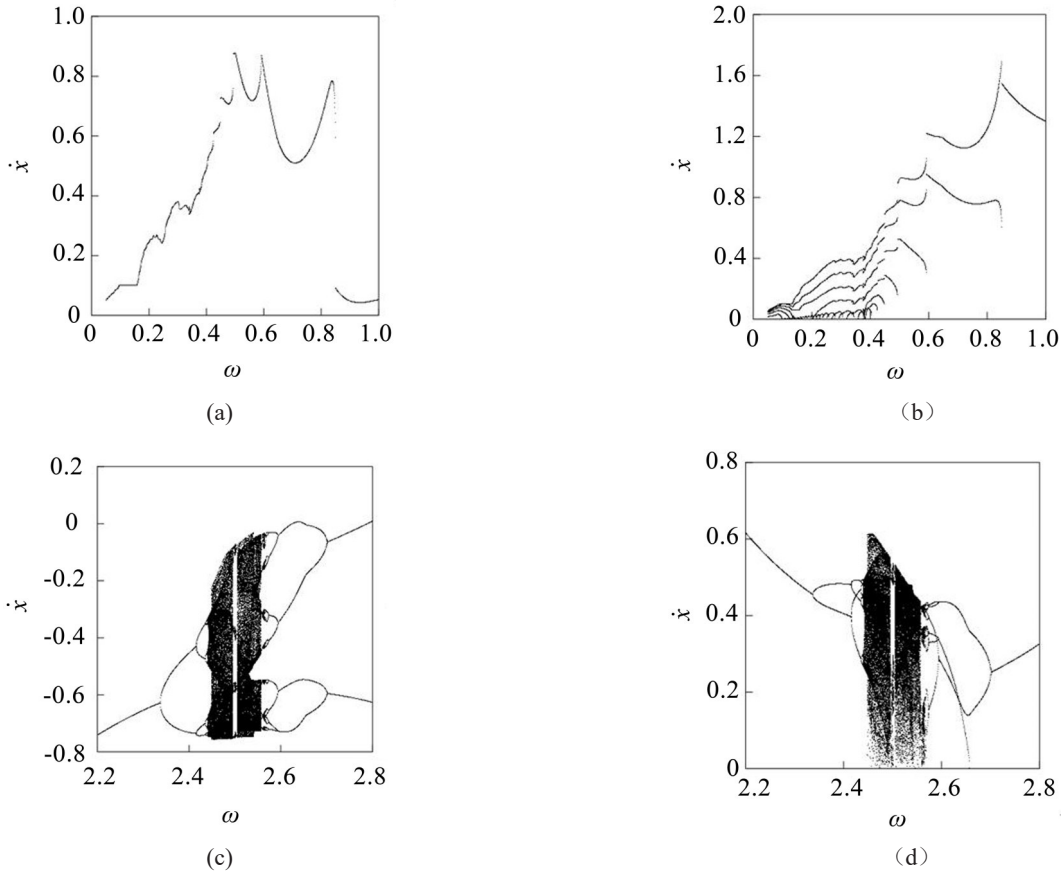
在一个振动周期运动 $T_n = 2n\pi/\omega$ 内的激振力周期数，p 表示质块与间隙约束的冲击次数（$p = 0,1,2,3,\cdots$）。p/n（$\tilde{p}/n$）表示非粘滞滑移（粘滞滑移）碰撞运动类型，特别的是，当 $p = 0$ 时，质块与约束面无碰撞发生，即质块的位移小于间隙 δ，出现这种情况的原因是间隙过大或激振力幅值较小。定义两类 Poincaré 映射截面，其中一类为周期映射：$\sigma_n = \{(x,\dot{x},t) \in R^2 \times T | x = \delta, \mathrm{mod}(t = 2\pi/\omega)\}$，用来识别振动系统的周期数 n；另一类为碰撞映射：$\sigma_p = \{(x,\dot{x},t) \in R^2 \times T | x = \delta, \dot{x}_+ > 0\}$，用来识别质块与弹性约束的碰撞次数 p，可结合两种 Poincaré 映射确定碰撞振动系统的周期类型。

取系统无量纲参数：$\zeta = 0.1$，$v = 0.1$，$\mu = 0.1$，$\delta = 0.1$，以激振频率 ω 为控制参数来分析系统动态特性。图2为质块 M 在不同激振频率条件下系统的全局周期分岔图和全局碰撞分岔图，图3为质块 M 在不同激振频率条件下系统的周期分岔图和碰撞分岔图的局部放大图，综合图2和图3可以看出，系统经历了单周期运动、二周期运动、多周期运动和混沌运动，并与约束面发生了多次碰撞。当 $\omega \in [0.05, 0.19]$ 时，系统为周期一颤碰运动，$\omega = 0.18$ 时其相图、Poincaré 截面图、速度时间历程图和位移时间历程图如图4（a）所示，其 Poincaré 截面图为一个点，表示单周期运动，从图2（b）系统碰撞分岔



(a) 系统周期分岔图　　(b) 系统碰撞分岔图

图 2 系统随激振频率变化的全局周期分岔图和全局碰撞分岔图



(a)　　（b）

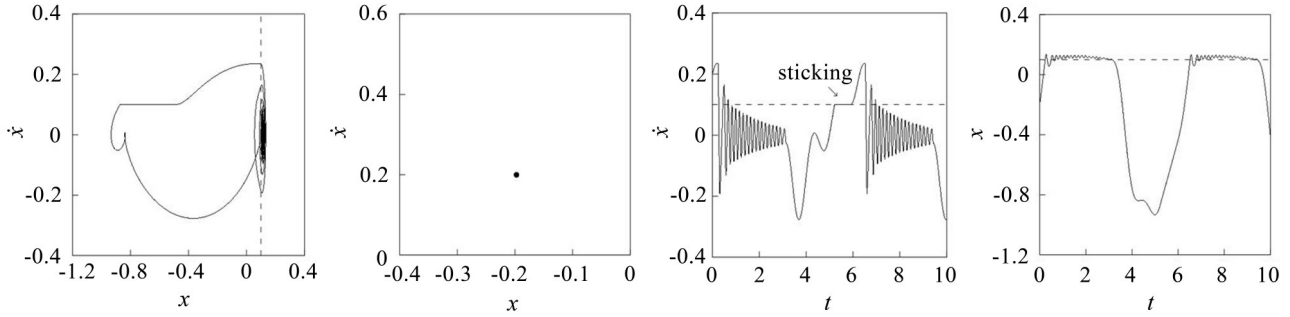
(c)　　（d）

图 3 系统周期分岔图和碰撞分岔图的局部放大图

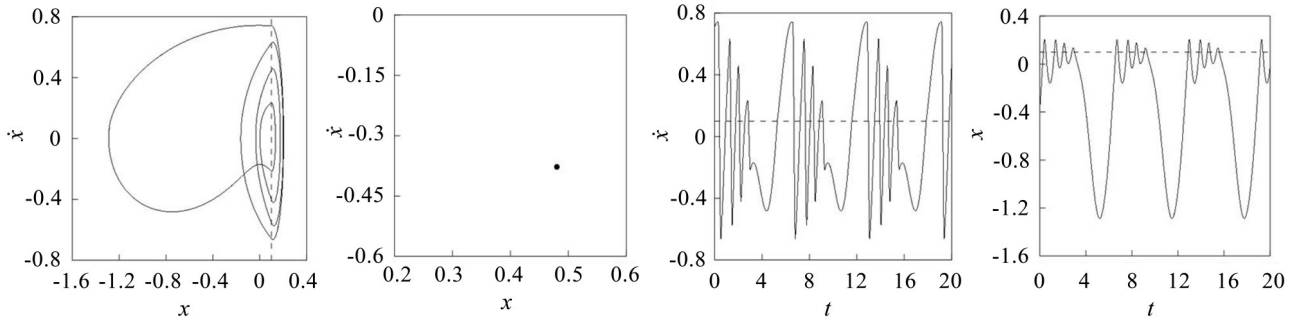
图和图4(a)相图可以看出，此时质块多次与右侧弹性约束发生碰撞，每一次碰撞能量都会减小，对应在时间历程图上就会出现一段振荡，并且质块有一段速度为0.1，此时代表质块与皮带发生粘滞；随着激振频率的继续增大，当ω穿越0.19时，系统主要以非粘滞颤碰运动为主，图4(b)为$\omega=0.48$时的相图、Poincaré截面图和时间历程图，系统为4/1运动，从相图和时间历程图均可看出其与右侧弹性约束发生了4次碰撞，且没有发生粘滞；随着激振频率的递增，当激振频率ω穿越0.85时，系统由$p/1$运动转迁为1/1运动，图4(c)为$\omega=2.289$时的系统运动状态图，Poincaré截面图为一个点，时间历程图为等高的波形循环，表示系统为单周期运动，且可以看出此时质块与约束面发生了一次碰撞；当$\omega=2.4$时，系统经倍化分岔进入周期二运动，如图4(d)所示，其Poincaré截面图为2个点，时间历程图为2个波形循环且穿越了两次约束面，为2/2运动；随后系统又进入周期四运动，图4(e)所示，质块与约束面发生了4次碰撞，为4/4运动；系统逐渐转迁为混沌运动，如图4(f)所示，当$\omega=2.525$时，其Poincaré截面图为杂乱的点；此后系统从混沌运动逐渐演化为8/16、4/8、2/4、1/2运动，随激振频率的进一步增加，当$\omega>3.77$时，质块与弹性约束无碰撞接触，图4(g)为$\omega=3.78$时的相图、Poincaré截面、速度时间历程图和位移时间历程图，由图可知，Poincaré截面图为1个点，表示系统为单周期运动，且质块的位移小于间隙，质块与右侧弹性约束无碰撞发生，时间历程图为等高的波形循环，没有发生粘滞运动，此时系统为0/1运动，系统运行较为平稳。

2.2　摩擦系数对系统动力学特性影响

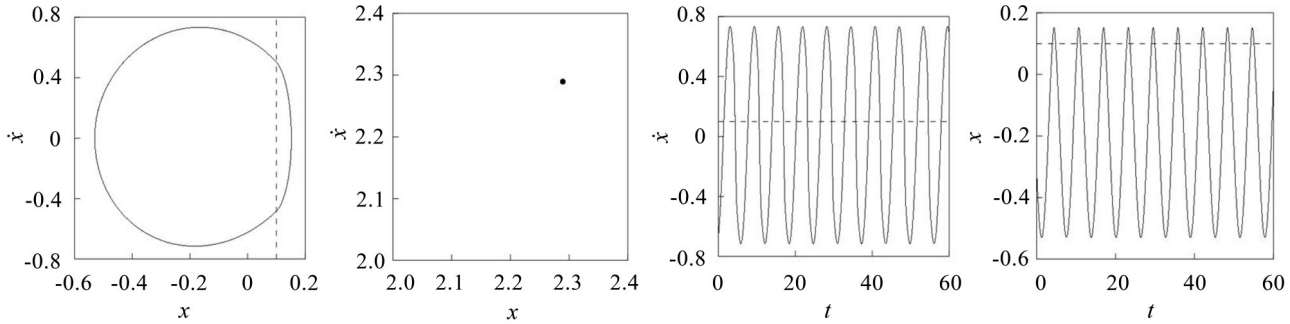
在保证其他基准参数不变的条件下，通过改变摩擦系数μ大小，研究摩擦系数对系统动态特性的影响。图5为系统在不同摩擦系数下的质块与弹性约束的冲击速度$\dot{x}$随激振频率ω变化的周期分岔图



(a) $\omega=0.18$　$\tilde{p}/1$颤碰粘滞运动

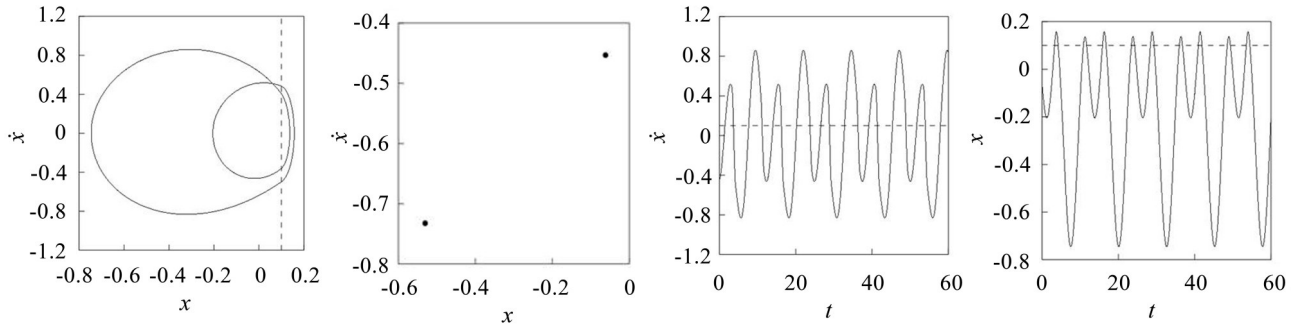


(b) $\omega=0.48$　4/1运动

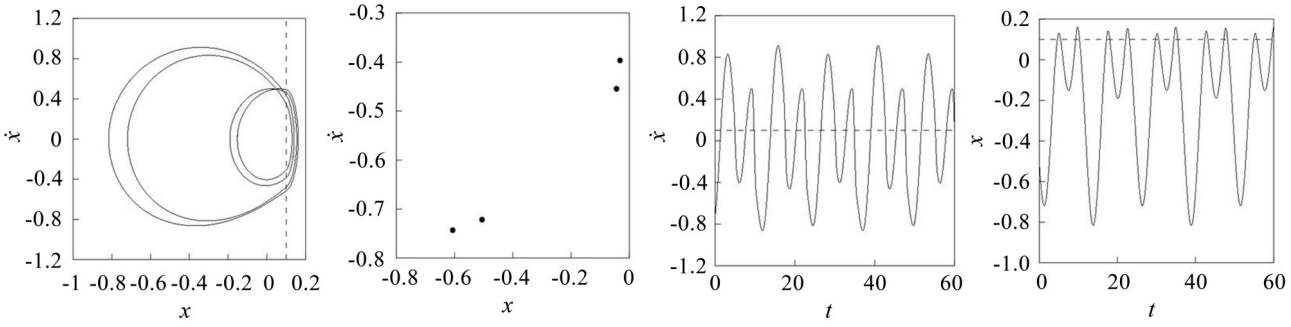


(c) $\omega=2.289$　1/1运动

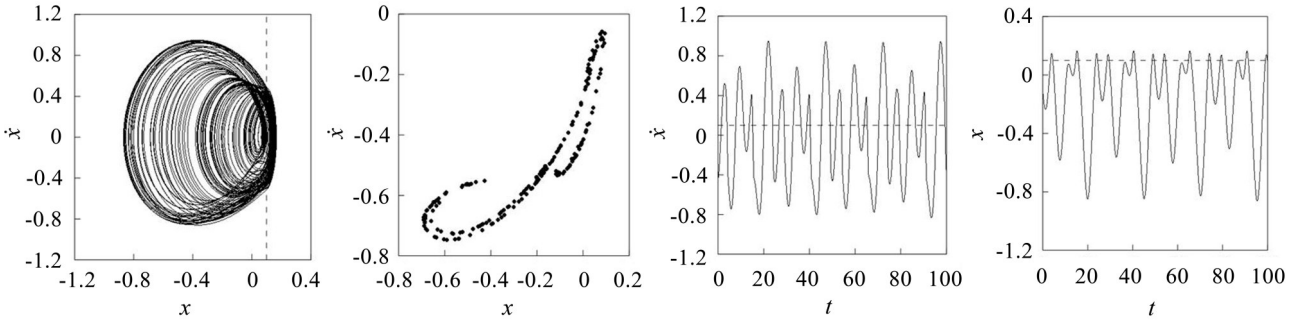
图4　系统在不同激振频率下的相图、Poincaré截面、速度时间历程图和位移时间历程图



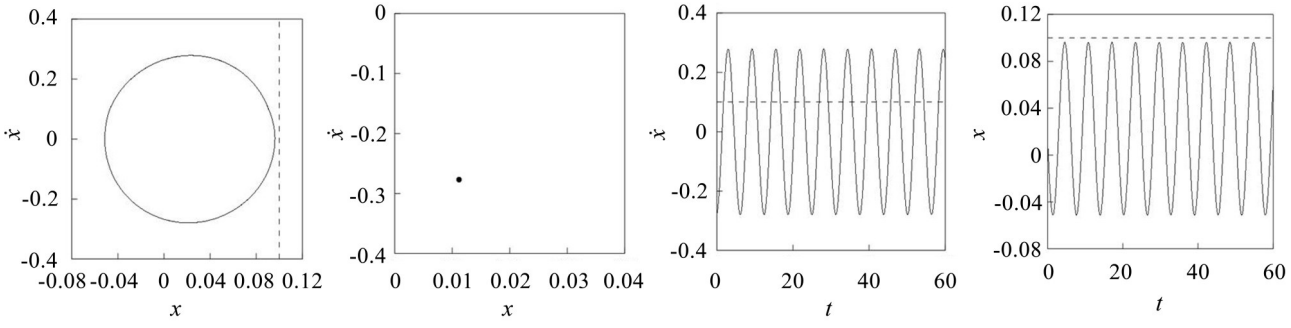
（d）$\omega = 2.4$ 2/2运动



（e）$\omega = 2.42$ 4/4运动



（f）$\omega = 2.525$ 混沌运动



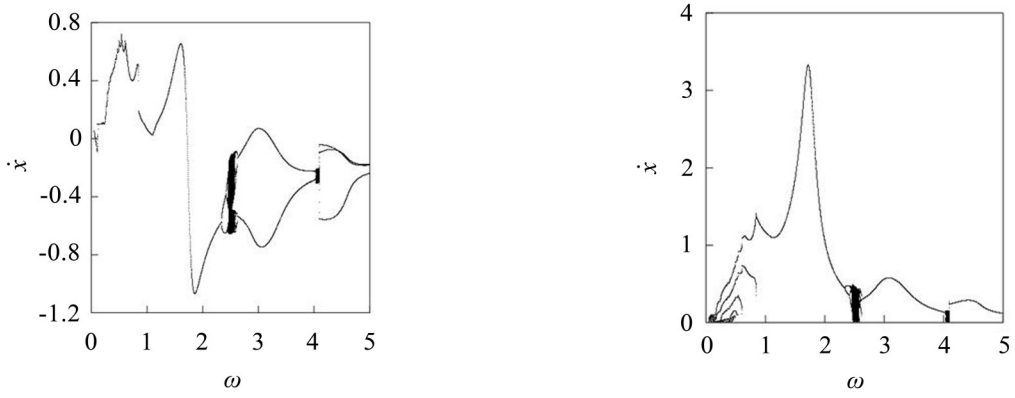
（g）$\omega = 3.78$ 0/1运动

图 4 系统在不同激振频率下的相图、Poincaré截面、速度时间历程图和位移时间历程图

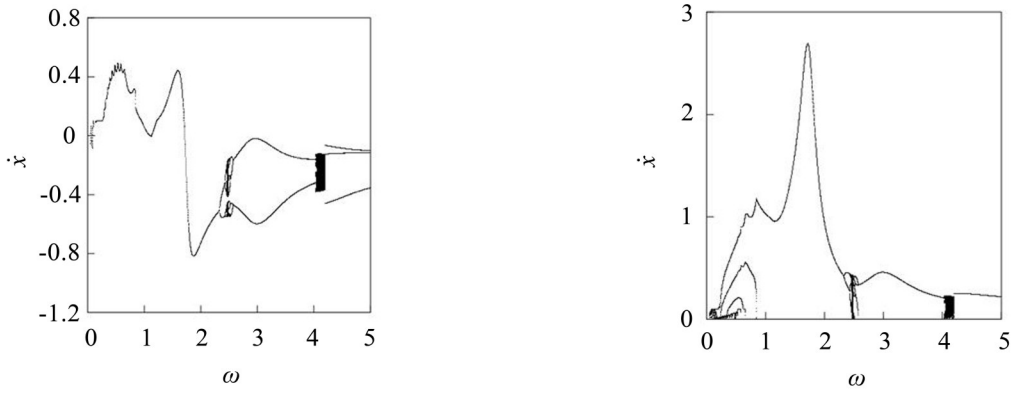
与碰撞分岔图。激振频率较低时，随摩擦系数的递增，低频段粘滞$\tilde{p}/1$振动型的激振频率存在范围变宽，质块的冲击速度逐渐减小，非粘滞滑移运动区间减小，粘滞滑移运动区间增加；在中频区域内系统主要呈现1/1周期运动，随着摩擦系数的增大，系统在$\omega = 2.35$附近，由概周期运动逐渐转迁为周期运动，质块与约束面的碰撞次数大幅度降低；在高频阶段，随着摩擦系数的增大，系统的混沌运动区域变宽，质块与约束面的冲击次数急剧增加，由1/3周期运动转为混沌运动。

2.3 阻尼系数对系统动力学特性的影响

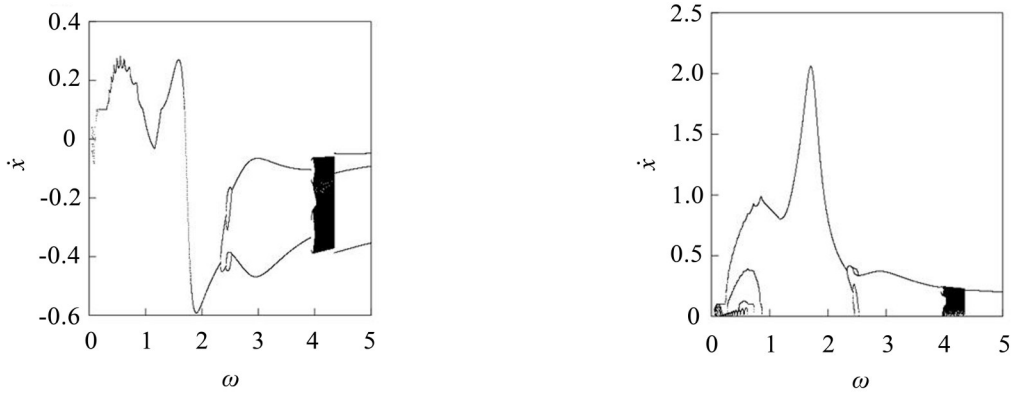
在保证其他基准参数不变的条件下，通过改变阻尼系数的大小，研究阻尼系数ζ变化对系统动力学特性的影响。图6为阻尼系数分别取0.05、0.15、0.2、0.4时，系统响应随激振频率ω变化的分岔图。由图6可知，阻尼系数ζ较小时，质块



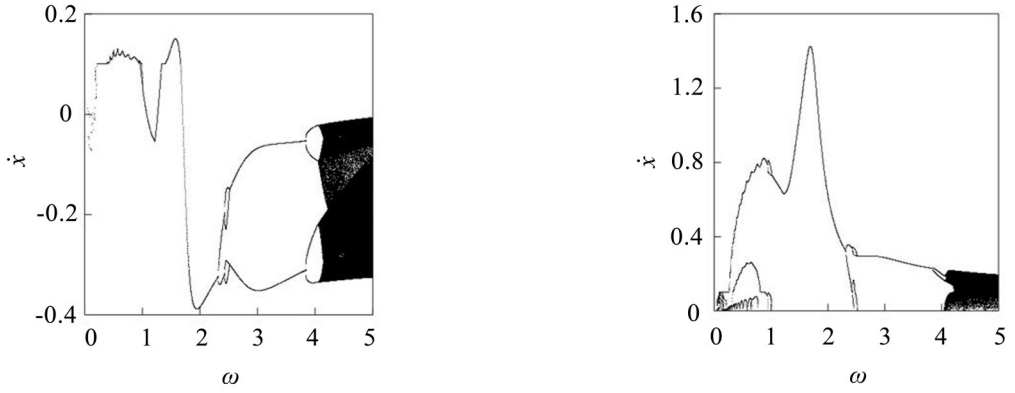
（a）$\mu = 0.2$



（b）$\mu = 0.3$

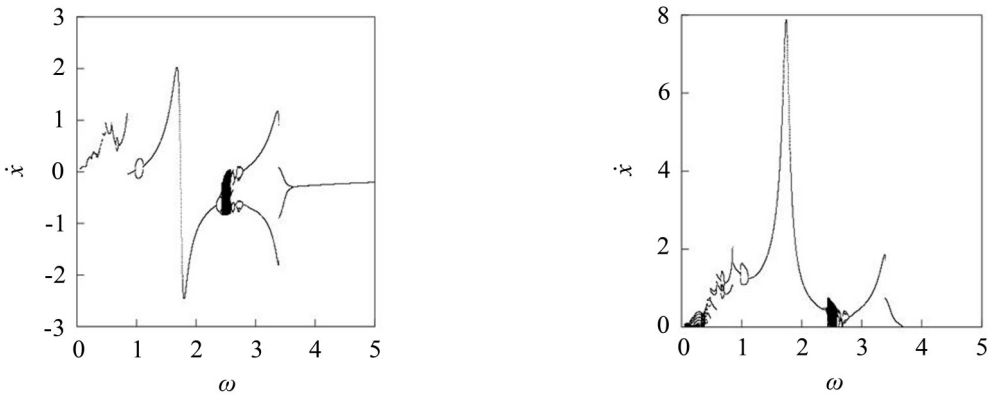


（c）$\mu = 0.4$

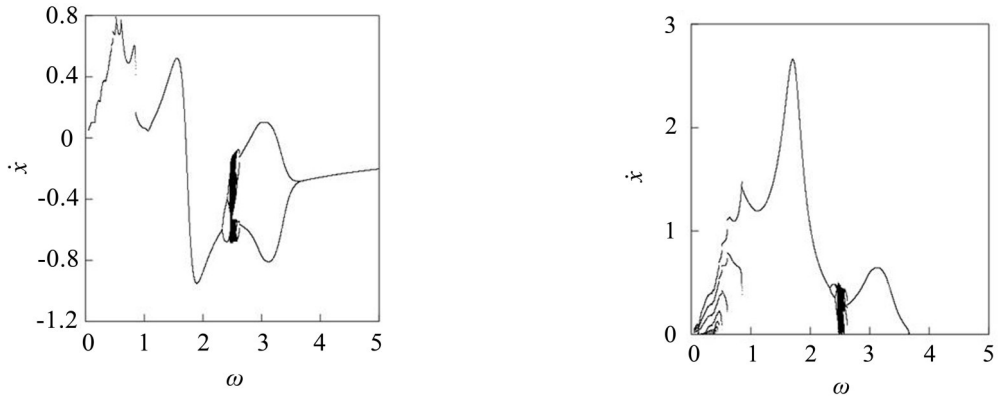


（d）$\mu = 0.5$

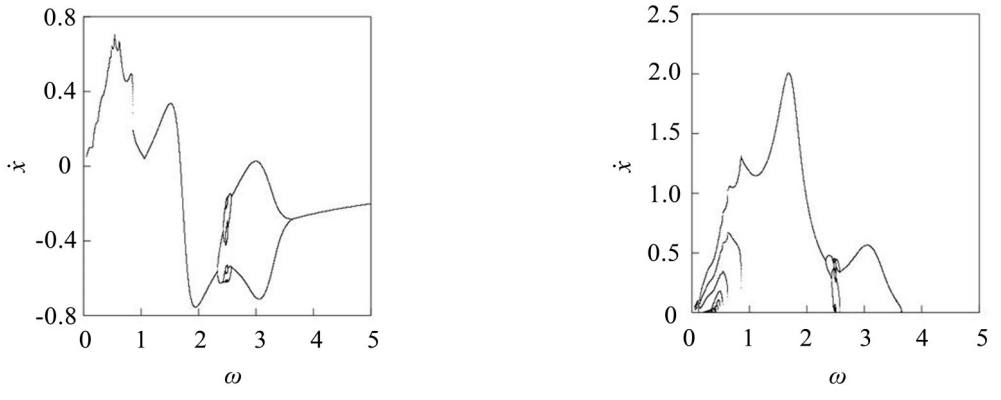
图 5　不同摩擦系数μ下的系统周期分岔图和碰撞分岔图



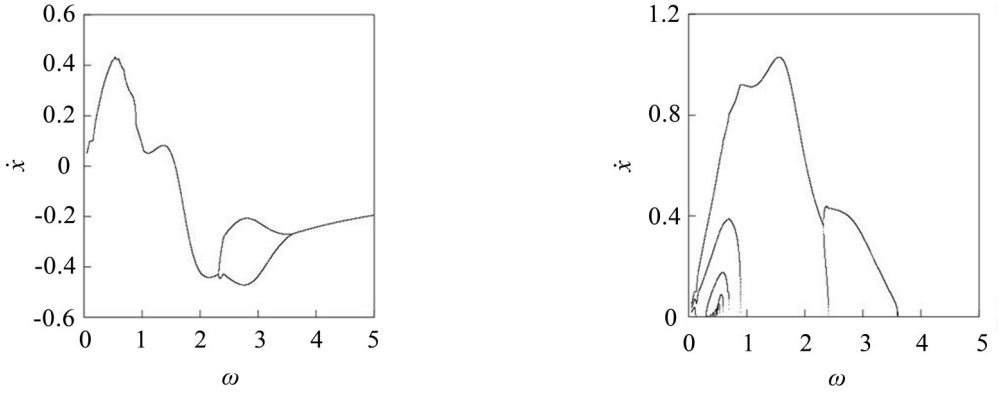
(a) $\zeta = 0.05$



(b) $\zeta = 0.15$

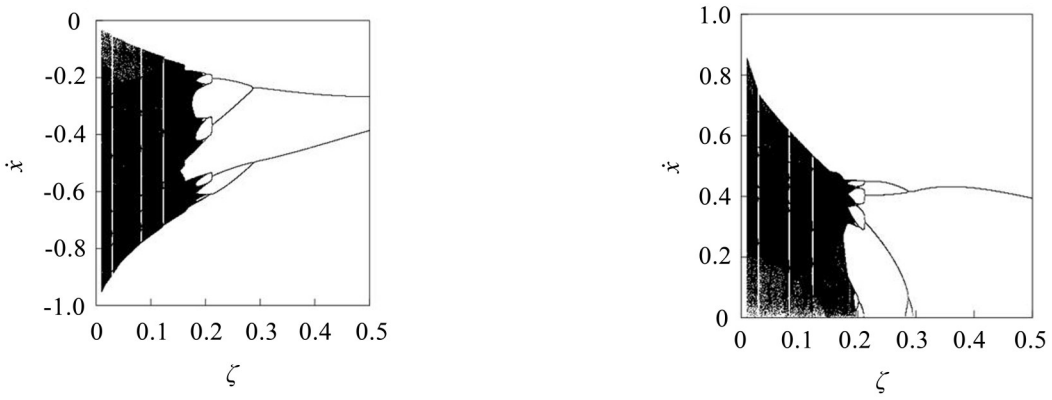


(c) $\zeta = 0.2$



(d) $\zeta = 0.4$

图 6 不同阻尼系数ζ下周期分岔图和碰撞分岔图



(a) 系统周期分岔图　　（b）系统碰撞分岔图

图 7 $\omega = 2.48$ 时系统响应随阻尼系数变化的周期分岔图和碰撞分岔图

与弹性约束的冲击速度较大，质块与约束面的碰撞次数较多；随阻尼系数ζ的增加，在中频阶段，系统由混沌运动逐渐转迁为周期运动，并且其与约束面的冲击速度大幅度降低，有利于系统的稳定运行；在高频阶段，随着阻尼系数的进一步增加，其周期运动保持不变，质块冲击速度有所降低，当超越临界值$\omega = 3.77$时，系统仍为0/1运动，此时阻尼系数对其影响不是很大。分析可知，选取较大的阻尼系数在一定程度上有利于系统稳定。

2.4 定频率下阻尼系数变化对系统动力学特性的影响

为进一步分析阻尼系数对系统响应的影响，图7表示为频率$\omega = 2.48$时，系统响应随阻尼系数变化的周期分岔图和碰撞分岔图，研究表明，阻尼系数较小时，系统以混沌运动为主，且质块与约束面碰撞剧烈，系统状态极不稳定；当阻尼系数$\zeta > 0.196$时，系统从阵发性混沌运动逐渐进入周期运动，最后转迁为1/2运动，系统状态较为稳定。

3 结 语

本文建立了一类含间隙和干摩擦单自由度弹性碰撞振动系统的力学模型，定义两类Poincaré映射，研究了激振频率、摩擦系数及阻尼系数对系统周期冲击振动稳定性和分岔特性的影响 得出以下结论：

（1）研究了不同激振频率对系统动力学特性的影响，发现该系统动力学特性比较复杂，存在着0/1运动、1/1运动、2/2运动、4/1运动、4/4运动和混沌运动等。

（2）保证其他基准参数不变的条件下，随着摩擦系数的增加，低频区域内系统非粘滞滑移区域减小，粘滞滑移区域增加，质块的冲击速度逐渐减小；摩擦系数的增加使得混沌存在域发生右移，1/1和1/2周期运动状态基本保持不变，而1/3周期运动最终被混沌运动替代。

（3）阻尼系数增大，系统的混沌运动逐渐消失，同时质块与约束面的冲击速度和碰撞次数大幅度降低，在较大的阻尼系数下系统以周期运动为主，系统稳定性在一定程度上增加。

参考文献：

[1] LUO G W, ZHU X F, SHI Y Q. Dynamics of a-two-degree-of freedom system with a rigid stop: diversity and evolution of periodic-impact motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 334: 338-362.

[2] ASHESH SAHA, MARIAN WIERCIGROCH, KRZYSTOF JANKOWKI, et al. Investigation of two different friction models from the perspective of friction-induced vibrations[J]. Tribology International 90 (2015): 185-197.

[3] CHEN HEBAI, DUAN SEN, TANG YILEI, et al. Global dynamics of a mechanical system with dry friction[J]. Differential Equations, 265(2018): 5490-5519.

[4] 张有强，丁旺才. 干摩擦对碰撞振动系统周期运动的影响分析[J]. 振动与冲击，2009，27(6)：110-116.

[5] 丁旺才，张有强，张庆爽. 含干摩擦振动系统非线性动力学分析[J]. 工程力学，2008，25(10)：212-217.

[6] 王晓笋，巫世晶. 含碰撞的平面摩擦系统半解析半数值算法研究[J]. 中南大学学报(自然科学版)，2016，47(9)：2997-3004.

[7] 张艳龙，唐斌斌，王丽，等. 动摩擦作用下含间隙碰撞振动系统的动力学分析[J]. 振动与冲击，2017，36(24)：58-63.

[8] 王丽，张艳龙，唐斌斌，等. 动摩擦作用下非光滑振动系统黏滑颤振分析[J]. 应用力学学报，2018，35(4)：834-839.

[9] 吴丹，丁旺才. 含干摩擦碰撞系统的簇发振荡及稳定性分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版)，2020，48(3)：46-51.

[10] 朱喜峰，罗冠炜. 两自由度含间隙弹性碰撞系统的颤碰运动分析[J]. 振动与冲击，2015，34(15)：196-200.

[11] 吕小红，罗冠炜. 含间隙振动系统周期的多样性和转迁特征[J]. 振动工程学报，2020，33(4)：688-697.

[12] 安贵杰. 干摩擦碰撞振动系统的动力学特性分析[D]. 塔里木：塔里木大学，2021.