

文章编号:1006-1355(2021)03-0073-04

L型耦合板模型振动响应统计方差分析

蔡延年, 张文春, 石巍, 王铁钧, 王大鹏

(中车大连机车车辆有限公司 辽宁省轨道交通车辆设计制造专业技术创新中心,
辽宁 大连 116026)

摘要:为探究统计能量分析法的有效性,以L型耦合板结构为研究对象,建立功率流平衡方程,计算扰动情况下耦合板的振动平均响应,对系统的振动响应结果进行统计方差分析。结果表明:频率(模态重叠因子)的升高导致振动响应平均值的方差逐渐减小,其95%置信区间覆盖范围逐渐趋于零;对于振动响应的表达方式,低频段应使用平均值及95%置信区间的形式,高频段可使用统计平均结果表示;提高平均带宽的宽度显著改善方差较大问题,较宽的带宽有助于提高声振响应计算精度。

关键词:振动与波;统计能量分析;耦合板;振动响应;方差分析

中图分类号:TB53

文献标志码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2021.03.013

Statistical Variance Analysis for Vibration Responses of L-shaped Coupled Plates

CAI Yannian, ZHANG Wenchun, SHI Wei,
WANG Tiejun, WANG Dapeng

(Liaoning Professional Technology Innovation Center for Design and Manufacture of Rail Transit Vehicles, CCRC Dalian Co., Ltd., Dalian 116026, Liaoning, China)

Abstract: In order to analysis the validity of statistical energy analysis, power flow equilibrium equation was established for the model of an L-shaped coupled plate and the mean vibration responses were calculated under perturbation condition. The results indicate that with the increase of frequency (mode overlap factor), the variance of the mean value of vibration response decreases gradually; and the 95 % coverage of the confidence interval tends to 0. The vibration response can be expressed by the mean value of the vibration response and its 95 % confidence interval in the low frequency band and by statistical mean results in the high frequency band. Increasing the average bandwidth can significantly ameliorate the problem of large variance. And the wider band is helpful to improve the accuracy of vibroacoustic response calculation.

Key words: vibration and wave; statistical energy analysis; coupled plate; vibration response; variance analysis

自20世纪60年代提出以来,统计能量分析法(Statistic energy analysis, SEA)已经广泛应用于轨道交通,航空航天,汽车,船舶等行业的声振响应预测与控制问题。这一方法的本质是从能量角度出发,分析和研究振动与声的统计处理方法。所以,“统计”具有特定含义,是指把研究对象划分成不同的子系统后,假定每个子系统的模态参数的统计分布为已知的统计总体,该统计总体有一系列名义上的同类子系统组合而成。同类子系统的模态参数上

的差异在给定的频率范围内具有随机分布的特性。任意子系统均可视为统计总体的一个样本。由于子系统具备统计特性,子系统的模态参数也是随机变量,那么统计总体在给定输入激励下的响应也是随机变量。作为随机变量,有必要对响应结果进行统计平均值及其方差方面的统计性分析。

Lyon首次研究了SEA模型的统计方差问题^[1],以结构和房间等简单模型为研究对象,给出了其输入功率和响应的方差。Langley等^[2-7]针对统计能量分析原理涉及的统计估计问题进行了一系列分析,在理论计算,数值分析及试验验证方面均有所建树,极大地促进了这一细分研究方向的发展。国内方面,廖庆斌等^[8-10]分析了统计能量分析中响应统计估

收稿日期:2020-08-12

作者简介:蔡延年(1989-),男,辽宁省大连市人,博士,工程师,主要研究方向为振动与噪声控制。

E-mail: caiyannian@163.com

计的研究进展,随机结构及复杂耦合动力系统的振动响应统计特性问题。

本文基于统计能量分析原理,分析集中力作用下L型耦合板的振动响应,计算扰动输入情况下响应速度的平均值及95%置信区间的分布情况,讨论模态重叠因子,平均带宽宽度对统计方差的影响。

1 基本原理

在满足统计能量分析法的基本假设条件下^[1],依据能量守恒原理建立不同子系统间的功率流平衡方程:

$$\omega \eta_j E_j + \sum_k \omega \eta_{jk} \eta_j \left(\frac{E_j}{n_j} - \frac{E_k}{n_k} \right) = P_j \quad (1)$$

式中: ω 为圆频率, η_j 为子系统 j 的内损耗因子, E_j 为子系统 j 的能量, η_{jk} 为子系统 j 及 k 间的耦合损耗因子, n_j 和 n_k 分别为子系统 j 及 k 的模态密度, P_j 为子系统 j 的输入功率。

以矩阵形式扩展表示式(1),有:

$$C\hat{E} = P \quad (2)$$

式中: P 为每个子系统输入功率向量, \hat{E} 为子系统总体平均模态能量, $\hat{E} = E_j/n_j$, N 阶矩阵 C 为

$$C_{jj} = \omega \left(\eta_j + \sum_{k \neq j} \eta_{jk} \right) n_j \quad (3)$$

$$C_{jk} = -\omega \eta_{jk} n_j, j \neq k \quad (4)$$

当矩阵 C 和向量 P 具备随机特性且存在扰动情况下,式(2)改写为

$$(C_0 + C_{ran})\hat{E} = P_{in} + P_{ran} \quad (5)$$

式中: C_0 为矩阵 C 的确定性分量, P_{ran} 为扰动分量; P_{in} 为输入功率的确定性分量, P_{ran} 同样为扰动分量。

假设系统中存在的随机扰动很小,可以忽略扰动分量的二次项,对式(5)求逆,仅保留一阶摄动项:

$$\hat{E} - \hat{E}_0 = (C_0 + C_{ran})^{-1} (P_{in} + P_{ran}) \quad (6)$$

式中: \hat{E}_0 为系统能量的确定性分量。

假定扰动分量相互独立,进一步推导系统能量的方差表达式:

$$V_{ar}[\hat{E}_j] = \sum_k (C_{jk}^{-1})^2 V_{ar}[P_{ran,k}] + \sum_{s \neq k} \left[(C_{jk}^{-1} - C_{js}^{-1}) \hat{E}_s \right]^2 V_{ar}[C_{ran,ks}] \quad (7)$$

式中: $V_{ar}[\hat{E}_j]$ 为子系统 j 模态能量的方差, C_{jk}^{-1} 为SEA矩阵 C 的逆矩阵中第 jk 项, \hat{E}_s 表示子系统 s 的总体平均模态能量,其他两个方差项由式(8)及式(9)给出。

$$V_{ar}[P_{ran,k}] = P_{in,k}^2 r^2(\alpha_k, m'_k, B'_k) \quad (8)$$

$$V_{ar}[C_{ran,ks}] = C_{ks}^2 r^2(\alpha_{ks}, m'_k, B'_k) \quad (9)$$

式中, α_k 为子系统 k 外部输入功率方差及模态响应统计特性的参数,不同激励形式及模态振型统计特性下的计算方法均不相同^[10]; α_{ks} 为耦合系数; m'_k 为由子系统 k 的净等效损耗因子 η'_k (包含内损耗因子及耦合损耗因子)引起的半功率带宽模态重叠因子,其表达式为 $m'_k = \omega \eta'_k n_k$; B'_k 为与频率平均带宽 Δ 相关的带宽参数,其表达式为 $B'_k = \Delta/(\omega \eta'_k)$;函数 r^2 表示子系统响应的相对方差,由Langley基于高斯正交统计假设^[3]给出,单一子系统在简谐激励作用下能量的相对方差 r^2 的表达式:

$$r^2(\alpha, m, B) = \frac{\alpha - 1}{\pi m} \left(\frac{2 \tan^{-1}(B)}{B} - \frac{\ln(1+B^2)}{B^2} \right) + \frac{1}{\pi m B^2} \ln(1+B^2) \quad (10)$$

式中: α 为载荷类型参数, m 为模态重叠因子, B 为带宽参数。

2 计算模型

L型耦合板结构在各个行业应用广泛,在轨道交通行业中主要是组成车体结构的重要构件,L型耦合板耦合结构常见于边角位置。以图1所示的L型耦合板模型为研究对象,该耦合板模型由长板和短板组成,两板件间夹角为直角。长板尺寸为0.6 m×0.8 m,短板尺寸为0.6 m×0.4 m。板件材质为钢,厚度为3 mm,具体属性如表1所示。长板中心位置受到集中力作用,在分析频段63 Hz~8 000 Hz内的幅值均为1 N。

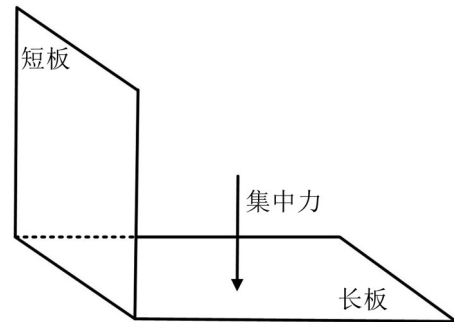


图1 L型耦合板模型示意图

表1 L型耦合板模型基本参数

参数	符号	数值
杨氏模量	E	2.1×10^{11} Pa
泊松比	ν	0.3
密度	ρ	7 800 kg/m ³
损耗因子	η	0.1 %

3 响应方差分析

基于统计能量分析原理的声振预示实质是利用频带内子系统的模态群振动能量计算不同子系统的平均振动能量,但实际应用中任意子系统实际具备的能量无法精确地等于统计能量分析法计算得到的平均能量。所以,只有对声振平均响应能量进行方差分析,才能掌握子系统平均能量偏离其平均值的程度。仅在方差与平均值相比是相对较小时,其平均计算结果具备实际应用价值,否则应以置信区间形式。

长板和短板的振动速度响应及其95%置信区间情况分别如图2及图3所示。由图2及图3可以看出,频率由低不断升高,95%置信区间范围不断缩小,振动速度响应结果的方差逐渐趋于零,此时具有很大概率接近平均速度响应,振动速度可以使用单一的统计量估算结果表示。

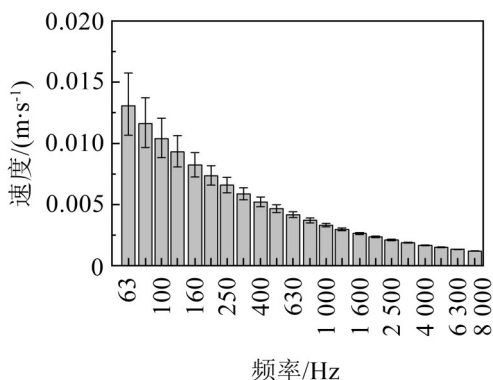


图2 长板振动速度响应及其95%置信区间

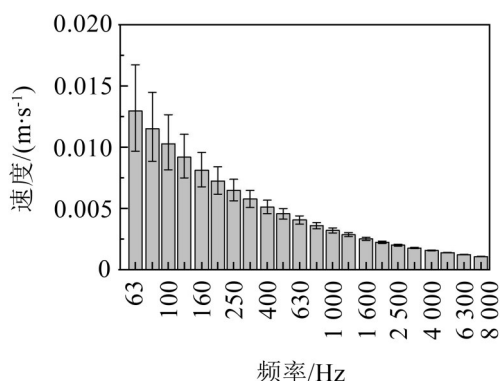


图3 短板振动速度响应及其95%置信区间

图4及图5是长板和短板振动速度响应的95%置信区间确定的偏差上下限与其平均值的比值情况,纵坐标以偏差百分数表示。在较低频段,特别是63 Hz中心频率处,长板的上、下限偏差百分数分别为20.4%及18.6%,短板的上、下限偏差百分数分别达到29.0%及25.4%,相对较大的偏差说明估算结果接近其平均值的概率很小,此时仅以振动速度平

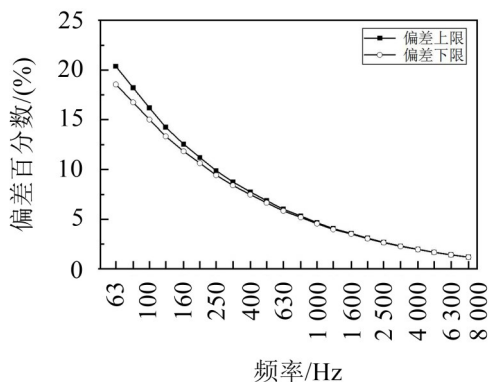


图4 长板振动速度响应相对偏差

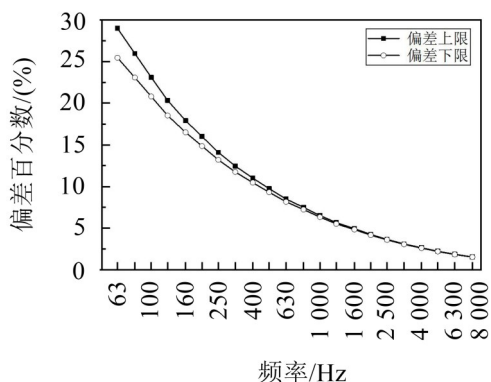


图5 短板振动速度响应相对偏差

均值表示这一频段的振动响应的准确性难以保证,需要以置信区间的表示形式。

图6为长板和短板的模态重叠因子计算结果,随着频率的升高,模态重叠因子不断增加。由于长板面积为短板的2倍,同一频段下的长板模态重叠因子为短板的2倍。以63 Hz为中心频率的频段下,长板的模态重叠因子为0.005 0,短板的模态重叠因子为0.002 5。过低的模态重叠因子条件下,子系统的模态数目不足,使得SEA的计算结果产生无法预知的波动和偏差,导致这一频段的振动速度响应上、下限偏差百分数过大。结合式(10)可知,随频率升高而减小的方差是由模态重叠因子的增加所引起。

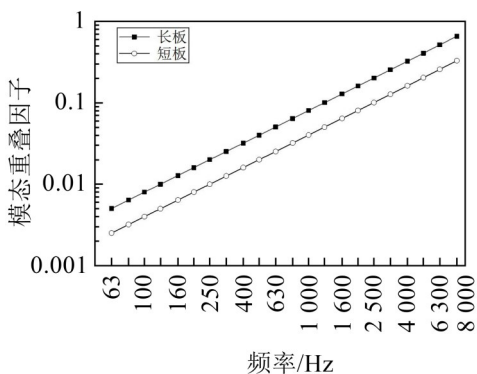


图6 长板及短板的模态重叠因子

不同带宽宽度的平均方式对方差的影响如图7及图8所示。图7和图8分别为短板振动速度的功率谱密度(Power spectral density, PSD)的1/3倍频程及1/1倍频程结果。图7和图8的参考值为1 (m/s²)/Hz, 灰色区域表示95%置信区间的覆盖区域, 其面积代表PSD计算结果的方差大小。

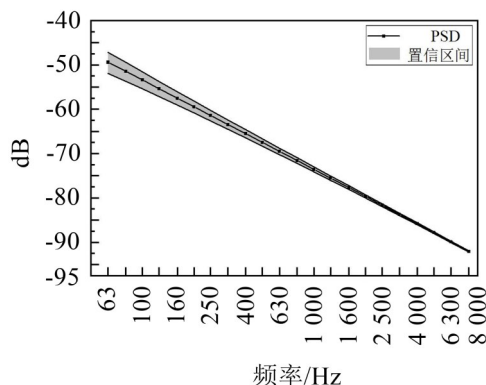


图7 1/3倍频程短板PSD及其95%置信区间

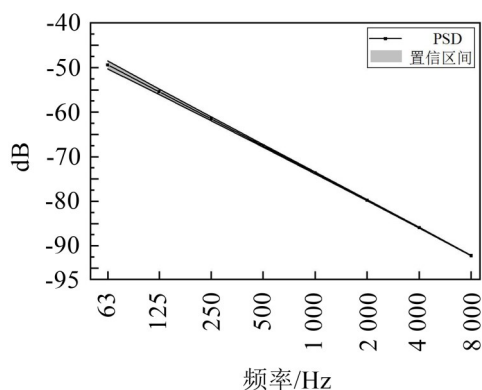


图8 1/1倍频程短板PSD及其95%置信区间

由图7和图8可知, 1/1倍频程的灰色区域显著小于1/3倍频程结果。这一结果表明平均带宽的宽度越宽, 方差越小。扩展求解带宽的宽度能够明显减小声振平均响应的方差, 改善计算精度。

4 结语

利用统计能量分析原理对L型耦合板进行了振动响应统计方差分析, 得到了耦合板结构不同组件在集中力作用下的振动速度响应平均值及其95%置信区间, 研究结果指出:

(1) 随着频率(模态重叠因子)的升高, 振动响应平均值的方差逐渐减小。

(2) 由于较低频段的模态重叠因子较低, 应使用振动响应平均值及95%置信区间的形式给出其

统计能量分析结果; 进入较高频段后, 则可以使用单一的统计量结果表示振动响应。

(3) 求解平均带宽的增加可以改善方差较大的不利结果, 有助于提高声振响应计算精度。

参考文献:

- [1] LYON R H. Statistical analysis of power injection and response in structures and rooms[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1969, 45(3): 545-565.
- [2] LANGLEY R S, COTONI V. Response variance prediction in the statistical energy analysis of built-up systems[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2004, 115(2): 706-718.
- [3] LANGLEY R S, COTONI V. The ensemble statistics of the vibrational energy density of a random system subjected to single point harmonic excitation[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2005, 118(5): 3064-3076.
- [4] COTONI V, LANGLEY R S, KINDER M R F. Numerical and experimental validation of variance prediction in the statistical energy analysis of built-up systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 288(3): 701-728.
- [5] REYNDERS E P B, LANGLEY R S. Cross-frequency and band-averaged response variance prediction in the hybrid deterministic-statistical energy analysis method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 428: 119-146.
- [6] JACOBSEN F, MOLARES A R. The ensemble variance of pure-tone measurements in reverberation rooms[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2010, 127(1): 233-237.
- [7] ANDRADE L, LANGLEY R S, BUTLIN T, et al. Experimental validation of variance estimation in the statistical energy analysis of a structural-acoustic system [J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2019, 233(18): 6448-6459.
- [8] 廖庆斌, 李舜酩. 统计能量分析中的响应统计估计及其研究进展[J]. 力学进展, 2007, 37(3): 337-345.
- [9] 廖庆斌, 李舜酩, 辛江慧, 等. 相关激励作用下随机结构振动响应的统计分析[J]. 振动工程学报, 2008, 21(5): 429-435.
- [10] 廖庆斌, 李舜酩, 王晓东, 等. 复杂耦合动力系统振动响应的统计估计方法研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(5): 76-82.
- [11] 姚德源, 王其政. 统计能量分析原理及其应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1995: 6.