文章编号：1006-1355(2020)06-0041-05+72

随机激励下新型滚珠式吸振器的参数最优设计

李 涵，张小龙，张 凯，郭文军

（西安建筑科技大学 机电工程学院，西安 710055）

摘 要：新型滚珠式动力吸振器在实际工况下所受的外部激励多为随机激励。利用H_2优化原理，采用白噪声作为外部激励，以随机激励下吸振系统的均方响应最小作为优化目标，对新型滚珠式动力吸振器进行参数最优设计。与简谐激励条件下该滚珠式吸振器的参数最优设计结果进行了比较。结果表明，外部激励为随机激励时，该滚珠式吸振器在随机激励条件下所进行最优设计的吸振效果更好。

关键词：振动与波；随机激励；动力吸振器；H_2优化原理；优化设计

中图分类号：O328 **文献标志码**：A **DOI编码**：10.3969/j.issn.1006-1355.2020.06.007

Optimal Parameters Design of a Ball Type Dynamic Vibration Absorber under Random Excitation

LI Han, *ZHANG Xiaolong*, *ZHANG Kai*, *GUO Wenjun*

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract : When the new ball-type dynamic vibration absorber is applied in actual conditions, the external excitation is mostly random excitation. Based on the H_2 optimization principle, using white noise as the external excitation and with the minimum mean square response of the vibration absorber system under the random excitation as the objective, the parameters of a new ball-type dynamic absorber are optimized. Result of the design is compared with that of the optimal design of parameters of the ball-type absorber under harmonic excitation. The results show that the new ball-type absorber has a better vibration absorption effect under random excitation.

Keywords : vibration and wave; random excitation; dynamic vibration absorber; H_2 optimization; optimal design

振动会对机械领域的实际工况产生一定的影响，当激励频率接近系统的固有频率时，会产生过大的振动，产生设备维修频繁、工作效率降低等问题。为了在共振频率点附近减小系统振动，在振动主系统上附加动力吸振器已经成为工程领域吸振的有效手段之一[1]。由于实际工业环境中振源的多样性，简谐激励下得到的参数最优解与实际工况中的参数最优解存在误差。因此，研究外部激励为随机激励时新型滚珠式动力吸振器的参数优化设计有一定的理论意义。

传统的动力吸振器或调谐质量阻尼器是一个在吸振器质量m和主系统质量M之间增加阻尼器和弹簧的吸振装置，由Frahm[2]于1911年发明。它的基本功能是在系统启动和停止过程中，当系统发生幅值较低的共振时，限制主质量的振幅。Ormondroyd和Den Hartog[3]在1928年指出，动力吸振器的阻尼对于单自由度系统在共振时的振幅响应的最小化有一个最优值，这种优化准则称为H_∞优化。Den Hartog[4]的定点理论常被用来确定附加在单自由度振动系统上动力吸振器的最佳调谐频率和阻尼比。

为了扩展动力吸振器的应用，Crandall和Mark[5]提出了另一种优化原理，其目标函数是在白噪声激励下使总振动能量或原结构的均方运动最小，称为动力吸振器H_2优化。如果振动系统受风荷载等随机激励而不是简谐激励作用，H_2优化比H_∞优化更可取。Warburton[6]和Asami等[7]推导出传统动力吸振器附加在无阻尼主系统上的H_2优化的精确解。Asami等[8]推导了传统动力吸振器附加在单自由度系统

收稿日期：2020-02-12

基金项目：国家自然科学基金资助项目(51175399)

作者简介：李涵(1995−)，女，陕西省咸阳市人，硕士研究生，主要从事新型滚珠吸振器的减振特性研究。
E-mail: 964344567@qq.com

通信作者：张小龙(1963−)，男，博士生导师。
E-mail: 7990114189@qq.com

上时H_∞和H_2优化问题的解析解。Cheung和Wong[9]推导出传统动力吸振器抑制平板振动的H_∞和H_2最优参数。

张小龙等[10]提出了一个滚珠式新型动力吸振器理论模型。该吸振器轨道面为摆线包络线旋转曲面，它可以有效降低机械或结构在多方向产生的强迫振动响应，同时克服激励幅值影响固有频率的缺点。其根据两定点理论进行了简谐激励下的吸振特性分析，但是并没有求解随机激励下该动力吸振器的参数最优解。

据此本文采用理想白噪声作为外力激励，将其应用到以摆线包络线旋转曲面作为轨道的滚珠吸振器上，建立吸振系统的运动方程式。根据主系统振幅响应的均方值设定性能指标，将性能指标最小化作为优化准则。对随机激励下的新型滚珠式动力吸振器进行参数最优设计，讨论参数对吸振性能的影响，证明随机激励下的参数最优解在实际工况的应用中优于简谐激励时的值。

1 吸振系统运动方程式

以摆线包络线旋转曲面为轨道的滚珠动力吸振器是在振动主系统（质量为M）的摆线包络线旋转曲面滚道内放置一吸振滚珠（质量为m、半径为r），主系统与基础之间用刚度为k的弹簧及阻尼系数为c的阻尼器相连的一种被动式动力吸振器。当振动主系统受到随机激励产生振动时，吸振滚珠在轨道上发生轻微滚动，吸振滚珠的黏性阻尼c_b耗散了一部分系统能量，达到多方向有效吸振的目的。安装吸振器后主系统系统模型如图1所示。

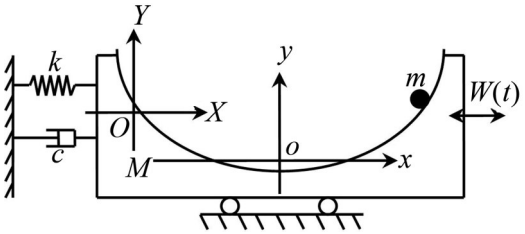


图1 安装动力吸振器主系统模型

对振动系统进行分析，系统平衡时，滚珠在凹面最底部且弹簧k无伸缩，设此处为坐标原点，建立基础坐标系OXY和主系统坐标系oxy。当主系统在OXY坐标系中运动到X、滚珠在oxy坐标系中运动到(x,y)时，系统动能$\bar{T}$、势能$\bar{U}$及耗散函数$\bar{V}$分别为

$$\left.\begin{aligned}\bar{T}&=\frac{1}{2}\left[M\dot{X}^2+m\left(\dot{x}+\dot{X}\right)^2+m\dot{y}^2\right]\\ \bar{U}&=\frac{1}{2}kX^2+mgy\\ \bar{V}&=\frac{1}{2}c\dot{X}^2+\frac{1}{2}c_b\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中：c_b为吸振滚珠运动阻尼。

简化轨道如图2所示。半径为a的动圆在xoy平面上，x轴与直线$y=2a$之间作无滑动纯滚动，摆线为滚珠上一点T在滚动时所描绘的轨迹。设起始动圆半径$O'T$经过某时刻转动到$o''T''$位置，转角为θ（逆时针$\theta<0$，顺时针$\theta>0$），根据上述条件写出摆线的参数方程式为[10]

$$\left.\begin{aligned}x&=a\left(\theta+\sin\theta\right)\\ y&=a\left(1-\cos\theta\right)\end{aligned}\right\}\quad(a>0,\quad-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)\tag{2}$$

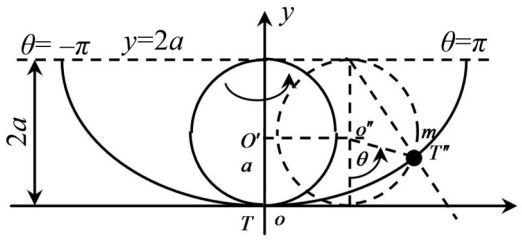


图2 轨道曲面

将式(2)代入式(1)得：

$$\left.\begin{aligned}\bar{T}&=\frac{1}{2}\left(M+m\right)\dot{X}^2+ma^2\dot{\theta}^2\left(1+\cos\theta\right)+\\ &ma\dot{\theta}\left(1+\cos\theta\right)\dot{X}\\ \bar{U}&=\frac{1}{2}kX^2+mga\left(1-\cos\theta\right)\\ \bar{V}&=\frac{1}{2}c\dot{X}^2+c_ba^2\dot{\theta}^2\left(1+\cos\theta\right)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由拉格朗日方程可知，当主系统受到随机激励力$W(t)$时，振动系统的运动方程式为

$$\left.\begin{aligned}&\left(M+m\right)\ddot{X}+ma\ddot{\theta}\left(1+\cos\theta\right)-ma\dot{\theta}^2\sin\theta+\\ &c\dot{X}+kX=W\left(t\right)\\ &ma\left(1+\cos\theta\right)\ddot{X}+2ma^2\ddot{\theta}\left(1+\cos\theta\right)-\\ &ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta+2c_ba^2\dot{\theta}\left(1+\cos\theta\right)+mga\sin\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

2 吸振系统参数优化设计

选取理想白噪声作为随机激励，其功率谱密度为S_0，可以得到主系统振动响应的自功率谱为：

$$S_{XX}\left(\omega\right)=\left|H\left(\omega\right)\right|^2S_{xx}=\left|H\left(\omega\right)\right|^2S_0\tag{5}$$

当滚珠在轨道内做微小滚动时，由于θ足够小，近似取$\sin\theta\approx\theta$、$\cos\theta\approx1$，且忽略高阶无穷小量。可得到振动主系统响应的幅频特性为：

$$\left|H\left(\omega\right)\right|=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}}\tag{6}$$

式中：参数A、B、C、D分别为

$$\left.\begin{aligned}A&=-\alpha^2+\beta^2\\ B&=2\alpha\beta\zeta_2\\ C&=\alpha^4-\left[\left(1+\mu\right)\beta^2+4\zeta_1\zeta_2\beta+1\right]\alpha^2+\beta^2\\ D&=-2\left[\left(1+\mu\right)\beta\zeta_2+\zeta_1\right]\alpha^3+2\left(\beta\zeta_1+\zeta_2\right)\beta\alpha\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=\sqrt{k/M}\,,\omega_2=\sqrt{g/4a}\,,\zeta_1=c/(2M\omega_1)\\&\zeta_2=c_b/(2m\omega_2),\alpha=\omega/\omega_1,\beta=\omega_2/\omega_1,\mu=m/M\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

式中：ω_1为主系统固有频率比；ω_2为吸振滚珠固有频率比；ζ_1为主系统阻尼比；ζ_2为吸振滚珠阻尼比；α为激励频率与主系统固有频率之比；β为吸振滚珠固有频率与主系统固有频率之比；μ为吸振滚珠质量与主系统质量之比。

主系统振幅响应的均方值为

$$E[\ddot{X}^2]=S_0\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=S_0\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}\mathrm{d}\alpha\tag{9}$$

在吸振系统模型中，性能指标为

$$I=\frac{E\left[\ddot{X}^2\right]}{2\pi S_0\omega_1}\tag{10}$$

性能指标是在均匀功率谱密度条件下主系统响应与激励力的比值。在分母中引入$2\pi\omega_1$使性能指标成为无量纲形式。

由詹姆斯公式表[5]得：

$$I=\frac{1}{4}\frac{p_1\zeta_2^3+p_2\zeta_2^2+p_3\zeta_2+p_4}{q_1\zeta_2^3+q_2\zeta_2^2+q_3\zeta_2+q_4}\tag{11}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}&p_1=4\beta^2(1+\mu)\\&p_2=4\beta\zeta_1\{\beta^2(1+\mu)+1\}\\&p_3=\beta^4(1+\mu)^2+\beta^2(4\zeta_1^2-2-\mu)+1\\&p_4=\mu\beta^3\zeta_1\\&q_1=4\beta^2(1+\mu)\zeta_1\\&q_2=\beta\{4\beta^2(1+\mu)\zeta_1^2+\mu+4\zeta_1^2\}\\&q_3=\zeta_1\{\beta^4(1+\mu)^2-2\beta^2(1-2\zeta_1^2)+1\}\\&q_4=\mu\beta^3\zeta_1^2\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由式(11)、式(12)可知，性能优化指标I是关于质量比μ、频率比β和阻尼比ζ_1和ζ_2这4个无量纲参数的函数。当性能指标取值最小时，吸振器吸振效果越好。因此，对吸振器进行参数优化即调整这4个参数，使性能指标达到最小值。

最优频率比和最优阻尼比通过式(13)来确定：

$$\left.\begin{aligned}&f=\frac{\partial I}{\partial\zeta_2}=0\\&g=\frac{\partial I}{\partial\beta}=0\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

一般情况下，根据式(13)不能求出解析解。然而在$\zeta_1=0$的情况下，这个方程的解有一个解析式。因此，我们将依次讨论方程的解析解($\zeta_1=0$)和数值解($\zeta_1\neq0$)。

2.1　主系统无阻尼($\zeta_1=0$)

将$\zeta_1=0$代入方程式(13)可以得到式(14)：

$$\left.\begin{aligned}&4(1+\mu)\beta^2\zeta_2^4+\{3(1+\mu)^2\beta^4-\\&\quad(2+\mu)\beta^2-1\}\zeta_2^2=0\\&2(1+\mu)^2\beta^3\zeta_2{}^2-(2+\mu)\beta\zeta_2{}^2=0\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

从式(14)可以解出频率比β和阻尼比ζ_2的最优解析解($\zeta_1=0$)：

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{\mathrm{opt}}=\frac{1}{1+\mu}\sqrt{1+\frac{\mu}{2}}\\&\zeta_{2\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{\mu(4+3\mu)}{8(1+\mu)(2+\mu)}}\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

将上述解析解代入到式(11)中得到$\zeta_1=0$情况下的性能优化指标：

$$I_{\mathrm{opt}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+3\mu}{\mu(1+\mu)}}\tag{16}$$

另一方面，张小龙等[10]给出了以摆线包络线旋转曲面作为轨道的滚珠吸振器在简谐激励下频率比$\tilde{\beta}$和阻尼比$\tilde{\zeta}_2$的最优解析解：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\beta}_{\mathrm{opt}}=\frac{1}{1+\mu}\\&\tilde{\zeta}_{2\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

将式(17)代入式(11)中得到：

$$\tilde{I}=\left(\mu+\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{6\mu(1+\mu)}}\tag{18}$$

图3为该动力吸振器在不同激励下吸振参数最优解析解随质量比的变化情况。两种激励下频率比的最优解析解曲线均随着质量比的增长而下降，且随机激励下的最优频率比曲线β_{opt}总是高于简谐激励下的最优频率比曲线$\tilde{\beta}_{\mathrm{opt}}$。而阻尼比的最优解析解曲线均随着质量比的增长而上升，且随机激励下的最优阻尼比曲线$\zeta_{2\mathrm{opt}}$总是低于简谐激励下的最优阻尼比曲线$\tilde{\zeta}_{2\mathrm{opt}}$。表明在不同激励下同一吸振系统吸振参数的最优解析解并不相同。

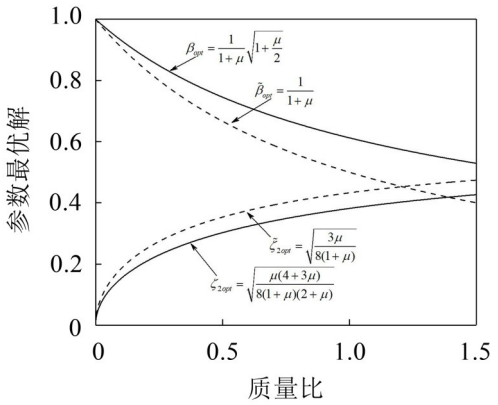


图3　在两种激励下吸振参数最优解随质量比的变化情况

图4显示了性能优化指标在不同激励下随质量比的变化情况。不同激励下的性能优化指标曲线均随着质量比的不断增大而减小，且简谐激励下的性能指标曲线$\tilde{I}$略大于随机激励下的性能指标曲线I_{opt}。说明质量比越大，吸振系统的吸振效果越好，但

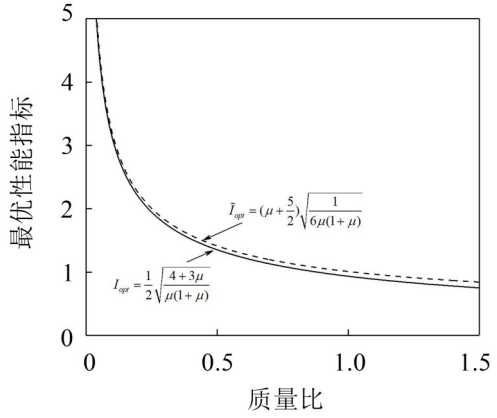


图4 在两种激励下性能指标随质量比的变化情况

在实际工程应用中，质量比的选择需要综合考虑多方因素。

图5说明外部激励为随机激励时，对新型滚珠式动力吸振器进行参数优化后，该动力吸振器的吸振效果得到明显改善。

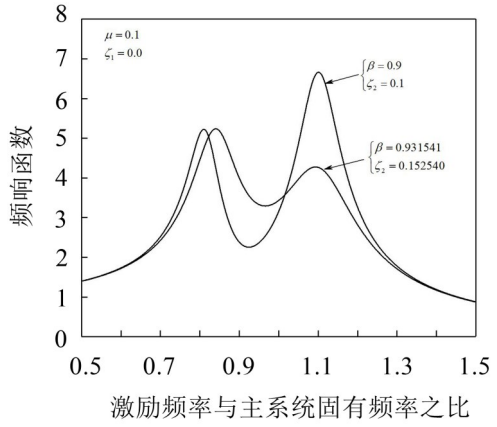


图5 参数优化前后吸振效果对比

图6显示了根据两种激励设计出具有参数最优解析解的吸振系统的响应曲线，从图6可以看出采用简谐激励，主系统振幅响应曲线的峰值等高。如果选择随机激励，那么振幅响应曲线的左峰总是比右峰高。然而，实曲线下的面积小于虚曲线下的面积，且在共振点附近，随机激励的吸振效果略强于简谐激励。表明主系统无阻尼时，随机激励下设计的吸振系统比简谐激励条件下设计的系统吸振效果更好。

如上所述，确定了主系统在无阻尼时随机激励下滚珠吸振器各个参数的最优解析解，并与简谐激励下的吸振系统的参数最优解析解进行对比。得出外部激励为随机激励时，进行参数优化设计可以提高吸振能力，且随机激励下基于最优设计的吸振效果优于简谐激励下的效果的结论。

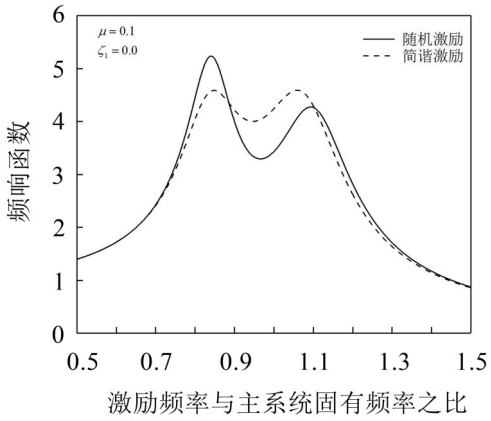


图6 两种激励下基于最优设计条件的响应曲线

2.2 主系统有阻尼($\zeta_1\neq0$)

当吸振器主系统有阻尼时，由于未知量过多，不能直接求出具体解析解，只能进行数值求解。式(13)可采用牛顿迭代法和MATLAB软件进行求解。设定初始值$\beta^{(0)}$和$\zeta_2^{(0)}$，并从初始值开始使用迭代公式，使其逐步逼近阻尼比和频率比的最优解$\beta^{(\nu)}$和$\zeta_2^{(\nu)}$，迭代公式为

$$\left.\begin{aligned}\beta^{(\nu+1)}&=\beta^{(\nu)}-\Delta\beta\\ \zeta_2^{(\nu+1)}&=\zeta_2^{(\nu)}-\Delta\zeta_2\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

其中：

$$\begin{bmatrix}\Delta\beta\\ \Delta\zeta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_\beta & f_\zeta\\ g_\beta & g_\zeta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f\\ g\end{bmatrix}\tag{20}$$

式中：$f_\beta=\partial f/\partial\beta$，$f_\zeta=\partial f/\partial\zeta_2$。

得到不同质量比μ和主系统阻尼比ζ_1下频率比β和吸振滚珠阻尼比ζ_2的最优数值解。将主系统无阻尼情况下各个参数的解析解与牛顿迭代法求出$\zeta_1=0$时的数值解进行对比。并分析主系统阻尼比和质量比对各个参数的最优数值解的影响。

图7说明了利用牛顿迭代法解出的吸振系统各个参数的最优数值解的正确性。

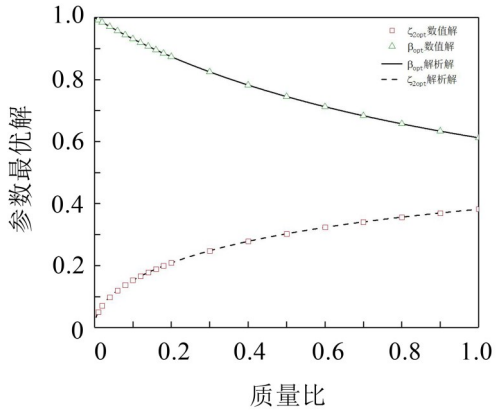


图7 主系统无阻尼时解析解与数值解

从图8可知，同一质量比下随着主系统阻尼比的变化，对应频率比的最优数值解波动较小，且质量比的选择并不影响其变化规律。同一主系统阻尼比下随着质量比的增加，对应频率比的最优数值解减小。

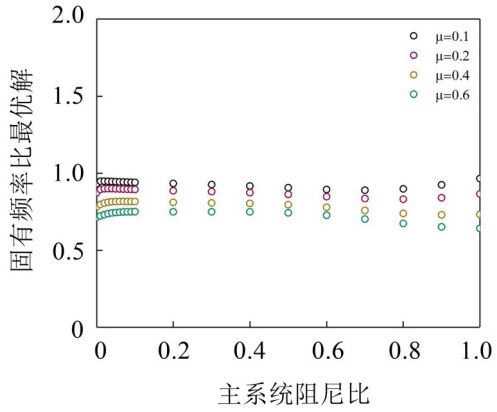


图8 最优频率比随主系统阻尼的变化情况

如图9所示，同一质量比下吸振主系统添加轻阻尼时，吸振滚珠阻尼比的最优数值解迅速减小至最小值，数值解达到最小值后，随着主系统阻尼比的变化，对应吸振滚珠阻尼比的最优数值解逐渐平稳。同样，质量比并不影响其变化规律。同一主系统阻尼比下随着质量比的增加，吸振滚珠阻尼比的最优数值解增加。

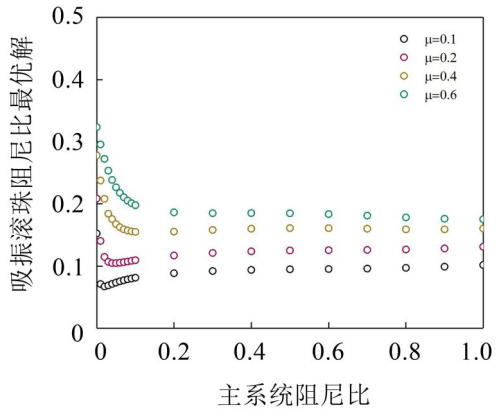


图9 最优阻尼比随主系统阻尼的变化情况

图10为吸振性能指标随主系统阻尼比和质量比的变化情况。每个质量比下以主系统阻尼比为变量的性能指标曲线均有一个最小值，该最小值即为此质量比下的最优性能指标。由图9可知，不同质量比下，性能指标达到最优时的主系统阻尼均为轻阻尼。随着质量比的增加，使性能指标达到最优的主系统阻尼比也在轻阻尼范围内增大，且增大的速率逐渐减小。

一般情况下，由实际工程安装条件的约束和上述质量比、主系统阻尼比对性能指标的影响两者共同确定使吸振性能指标最优的主系统阻尼比和吸振系统质量比。采用牛顿迭代法，将其代入相关计算式求出频率比和吸振滚珠阻尼比的最优数值解，完成新型滚珠式动力吸振器的参数最优设计。

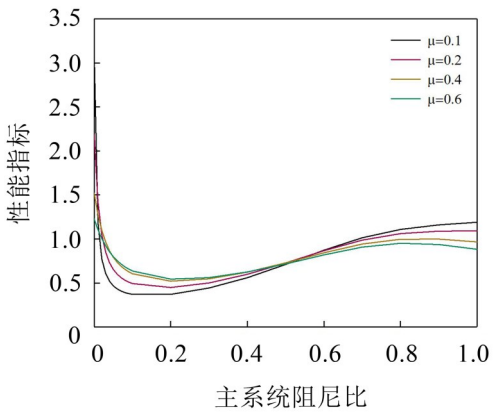


图10 性能指标随主系统阻尼的变化情况

3 结 语

选取理论白噪声作为外部激励，通过理论建模，参数优化设计及数值模拟，进一步研究了随机激励下新型滚珠式动力吸振器的吸振特性。结论如下：

(1) 对随机激励下的新型滚珠式动力吸振器进行参数优化，可以有效提高吸振能力。

(2) 在随机激励下给吸振主系统添加适当轻阻尼可以进一步优化吸振系统。

(3) 外部激励为随机激励时，基于随机激励优化设计得到的最优吸振参数的吸振效果优于简谐激励。

参考文献：

[1] 张义民. 机械振动[M]. 北京：清华大学出版社，2007：125-126.

[2] FRAHM H. Device for damping vibrations of bodies[P]. US Patent, 1911: 3576-3580.

[3] ORMONDROYD J, DEN HARTOG J P. The theory of the dynamic vibration absorber[J]. **ASME Journal of Applied Mechanics** , 1928, 50(7): 9-22.

[4] DEN HARTOG J P. Mechanical vibrations[M]. Dover Publications Inc, 1985.

[5] CRANDALL S H,MARK W D. Random vibration in mechanical systems[M]. Academic Press, 1963.

[6] WARBURTON G V. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters[J]. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1982, 10 (3): 381-401.

（下转第72页）