文章编号：1006-1355(2019)03-0083-05

准确求解固有频率提高分段积分阻尼识别精度及其应用

时海涛， 程 惠， 赵晓丹

（江苏大学 汽车与交通工程学院，江苏 镇江 212013）

摘 要：分段积分法是一种新近提出的阻尼识别方法，该方法的关键是需要准确识别信号固有频率。提出一种求解振动衰减信号有阻尼固有频率的方法，先使用傅里叶变换初估信号固有频率，通过两次积分运算构造出关于固有频率误差的方程组，解方程推导出计算公式，求得准确的信号固有频率，进而将其用于分段积分法识别阻尼。算例表明，该方法能够准确快速求解固有频率，通过控制整周期积分提高了阻尼识别精度，并且有益于准确计算出信号的幅值和相位，使得整个阻尼信号的识别和提取更加准确。将此方法应用于发动机齿轮室盖的阻尼识别，结果准确。

关键词：振动与波；信号识别；固有频率；阻尼比；齿轮室盖

中图分类号：O321；TN911.7 **文献标志码**：A **DOI编码**：10.3969/j.issn.1006-1355.2019.03.016

Improvement of the Accuracy of Damping Identification by using Piecewise Integral based on Accurately Solving the Natural Frequency

SHI Haitao , CHENG Hui , ZHAO Xiaodan

(School of Automobile and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu China)

Abstract : Piecewise integration is a recently proposed method for damping identification. The key of this method is to accurately identify the natural frequency of the signal. In this paper, a method of solving the natural frequency is proposed. Firstly, the natural frequency of the signal is estimated using Fourier transform. The equations of natural frequency error are constructed through twice integral operations. Then, the equations are solved and the exact natural frequency of the signal is obtained. Then, the natural frequency is used to identify the damping by piecewise integral method. The example shows that this method can solve the natural frequency accurately and quickly, raise the accuracy of damping identification by controlling the whole period integral, and is beneficial to the accurate calculation of the amplitude and phase of the signal. As a result, the whole damping signal can be identified and extracted more accurately. Finally, the proposed method is applied to damping identification for the gear housing cover of an engine.

Keywords : vibration and wave; signal recognition; natural frequency; damping ratio; gear housing cover

阻尼识别在发动机结构故障诊断、噪声控制及动力响应等方面具有重要意义，有关阻尼测试的研究受到广泛重视，快速、准确地识别阻尼一直是大家关注的焦点。传统的阻尼测试方法有自由衰减法和半功率带宽法[1-2]，随着研究的不断深入，很多阻尼识别方法相继被提出，如Hilbert-Huang变换[3]、EMD-HT[4]、加逆衰减指数窗[5]和小波变换法[6]等。在工程应用中，最常用的阻尼识别方法依然是半功率带宽法，虽然此方法受频率分辨率影响，阻尼识别存在误差，特别是在小阻尼情况下识别误差较大，但是它是在做傅里叶变换后使用计算公式直接得到阻尼比，计算方便快捷。

内积相关法[7]也是一种有效的阻尼识别方法，其特点是识别小阻尼精度高，但由于受到负频率项的影响，识别大阻尼时存在一定误差，而且由于需要进行优化计算，识别速度不够快。近年提出的分段积

收稿日期：2018-08-09

基金项目：拖拉机动力系统国家重点实验室开放基金资助项目(SKT2016013)；
江苏省高校优势学科建设工程资助项目(PAPD)

作者简介：时海涛（1992-），男，河南省邓州市人，硕士研究生，研究方向为信号处理。
E-mail: sean.001@foxmail.com

通信作者：赵晓丹（1963-），男，江苏省镇江市人，教授，研究方向为发动机噪声与振动控制、信号处理。
E-mail：zhaoxiaodan@126.com

分法[8]采用列方程推导关系公式的方法计算阻尼，具有计算速度快的特点，而且由于控制积分时间为信号半周期的倍数，消除了负频率项的影响，在大、小阻尼情况下均可有效识别。这种方法的关键是需要得到准确的振动衰减信号的有阻尼固有频率，但是由于泄漏误差和阻尼的存在，傅里叶变换只能识别出近似的信号固有频率，与真实的固有频率有偏差。本文以傅里叶变换识别的峰值频率为基础，推导出固有频率和傅里叶变换峰值频率之差的关系公式，快速求解出准确的固有频率，用于分段积分法，从而保证阻尼识别精度。将该方法应用于发动机齿轮室盖的阻尼识别。

1 准确求解固有频率提高阻尼识别精度

单自由度衰减响应信号$x(t)$可表示为

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-nt}\cos(\omega_d t+\phi)=C\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t}+C^*\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t} \tag{1}$$

式中：A为信号幅值，n为衰减系数，ω_d为有阻尼信号的固有角频率，ϕ为信号的初相位，常数C等于$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}/2$，$C^*$等于$A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}/2$。式(1)中的后一项为负频率项。

分段积分法[8]识别阻尼的基本思路是：对阻尼衰减信号与构造的基函数的乘积做两次时间不等的积分运算，由两次积分运算获得关系公式，求得衰减系数，进而求得阻尼比。理论分析如下：用固有频率ω_d构造基函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}$，对信号$x(t)$与基函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}$的乘积做两次时间不等的积分运算，第一次积分的积分区间为$[0,T_1]$，令$y=\mathrm{e}^{-nT_1}$，积分结果记为S_1，将积分结果展开

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{T_1}(C\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t}+C^*\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\mathrm{d}t=\\&C\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t+C^*\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega_d t}\mathrm{d}t=C\frac{1-y}{n}+\\&C^*\frac{1-y[\cos(2\omega_d T_1)-\mathrm{j}\sin(2\omega_d T_1)]}{n+\mathrm{j}2\omega_d}\end{aligned} \tag{2}$$

第二次积分区间假设为$[0,T_2]$，取$T_2=2T_1$。积分结果记为S_2

$$\begin{aligned}S_2&=\int_0^{T_2}(C\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t}+C^*\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\mathrm{d}t=\\&C\int_0^{T_2}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t+C^*\int_0^{T_2}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega_d t}\mathrm{d}t=C\frac{1-y^2}{n}+\\&C^*\frac{1-y^2[\cos(4\omega_d T_1)-\mathrm{j}\sin(4\omega_d T_1)]}{n+\mathrm{j}2\omega_d}\end{aligned} \tag{3}$$

为消除式(2)、式(3)中负频率积分项的影响，建立两式之间的比例关系，文献[8]提出控制积分时间为信号半周期的整数倍，即控制$T_1=m\pi/\omega_d$(m为任意正整数)，此时存在：$\cos(4\omega_d T_1)=\cos(2\omega_d T_1)=1$，$\sin(4\omega_d T_1)=\sin(2\omega_d T_1)=0$。此时，式(2)、式(3)可分别进一步化简为

$$S_1=C\frac{1-y}{n}+C^*\frac{1-y}{n+\mathrm{j}2\omega_d} \tag{4}$$

$$S_2=(1+y)\left(C\frac{1-y}{n}+C^*\frac{1-y}{n+\mathrm{j}2\omega_d}\right) \tag{5}$$

比较式(5)、式(4)两式可得

$$\frac{S_2}{S_1}=1+y=1+\mathrm{e}^{-nT_1} \tag{6}$$

进而可以解得衰减系数n

$$n=\frac{\ln(S_2/S_1-1)}{-T_1} \tag{7}$$

得到衰减系数n以后，便可求得信号的阻尼比

$$\zeta=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\omega_d/n\right)^2}} \tag{8}$$

以上为分段积分法识别信号阻尼的过程。从以上理论分析过程可知，只有准确识别出信号固有频率才能控制积分时间以消除负频率项的影响，因此固有频率ω_d的准确识别是分段积分法的关键。但在实际运算过程中，由于阻尼和截断误差的存在，使用傅里叶变换识别出的固有频率$\bar{\omega}$与真实信号角频率ω_d之间存在误差$\Delta\omega$[9]

$$\omega_d=\Delta\omega+\bar{\omega} \tag{9}$$

本文提出一种求解$\Delta\omega$的方法，进而修正傅里叶变换对信号固有频率的识别。求解过程如下：根据傅里叶变换峰值识别出的固有频率$\bar{\omega}$，构造基函数$e^{-\mathrm{j}\bar{\omega}t}$，对响应信号$x(t)$与构造的基函数$e^{-\mathrm{j}\bar{\omega}t}$的乘积作积分运算，积分区间为$[0,T_a]$，积分结果记为$D_1$

$$\begin{aligned}D_1&=\int_0^{T_a}(C\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t}+C^*\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\bar{\omega}t}\mathrm{d}t=\\&C\int_0^{T_a}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\omega t}\mathrm{d}t+C^*\int_0^{T_a}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_d+\bar{\omega})t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{10}$$

根据黎曼-勒贝格定理[10]，连续函数与高频函数乘积的积分趋于零，而(10)中的后一项相对于前一项为高频函数的积分。因此，计算中可将后一项忽略，式(10)的积分结果为

$$D_1=C\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-(n-\mathrm{j}\Delta\omega)T_a}}{n-\mathrm{j}\Delta\omega} \tag{11}$$

对响应信号$x(t)$与基函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\bar{\omega}t}$的乘积作第二次积分运算，取积分区间$[0,T_b]$，取$T_b=2T_a$，同理可得第二次积分结果为

$$D_2=C\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-(n-\mathrm{j}\Delta\omega)T_b}}{n-\mathrm{j}\Delta\omega} \tag{12}$$

将式(12)、式(11)相除，可得

$$\frac{D_2}{D_1}=1+\mathrm{e}^{-(n-\mathrm{j}\Delta\omega)T_a} \tag{13}$$

由式(13)即可求得固有频率误差$\Delta\omega$

$$\Delta\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\ln(D_2/D_1 - 1)}{T_a}\right) \tag{14}$$

式中：Im(*)表示对*取虚部。得到固有频率误差$\Delta\omega$后，代入公式(9)，便可求得固有频率ω_d。将得到的ω_d应用于分段积分法，由公式(7)、式(8)可以得到信号的衰减系数n和阻尼比ζ。

在得到信号固有频率ω_d和衰减系数n以后，可以进一步得到信号的幅值A和初相位ϕ，用于重构整个阻尼衰减信号。计算如下：振动衰减信号$x(t)$与$e^{-j\omega_d t}$的乘积做积分运算，积分区间为$[0, T_a]$，积分结果如式(10)、式(11)，由于这里代入的是ω_d，而非傅里叶变换得到的$\bar{\omega}$，因此式(11)中的$\Delta\omega$为零，积分结果表示为

$$D_3 = C\frac{1 - e^{-nT_a}}{n} \tag{15}$$

由式(15)可以求得C

$$C = \frac{D_3 \cdot n}{1 - e^{-nT_a}} = \frac{Ae^{j\phi}}{2} \tag{16}$$

由式(16)可求得信号的幅值A和初相位ϕ

$$\begin{cases} A = \left|\dfrac{2D_3 \cdot n}{1 - e^{-nT_a}}\right| \\ \phi = \arg\left(\dfrac{D_3 \cdot n}{1 - e^{-nT_a}}\right) \end{cases} \tag{17}$$

arg(*)表示对*求辐角。

2　仿真算例

为了验证此方法的有效性，构造如式(1)所示的响应信号，现给定3个信号，3个信号的幅值A均为2，初始相位ϕ均为0.3 rad，信号无阻尼固有频率f_n均为201.36 Hz，阻尼比ζ分别为0.007、0.01和0.02，信号有阻尼固有频率f_d分别为201.355 Hz、201.350 Hz和201.320 Hz。采样频率2 000 Hz，采样点数2 000点，考察本文的固有频率识别方法，识别结果如下。

表1　固有频率识别结果对比

阻尼比ζ	固有频率f_d/Hz	固有频率识别结果/Hz	
		傅里叶变换	本文方法
0.007	201.355	201.0	201.355 4
0.01	201.350	201.0	201.350 6
0.02	201.320	201.0	201.321 0

由表1可知，由于频率分辨率的限制，在3种不同阻尼比情况下，傅里叶变换方法都只能识别出近似的固有频率，识别值为201.0 Hz，而本文方法可快速求解出较准确的固有频率。

求解出固有频率后，控制积分时间为信号半周期整数倍，使用分段积分法进行阻尼识别，并进行对比。一种是采用傅里叶变换识别的$\bar{\omega}$作为信号固有频率ω_d进行阻尼识别，另一种是采用本文修正方法求解出的固有频率进行阻尼识别。算例中控制的积分时间T_1为80个信号周期，识别结果的对比如表2所示。

由表2可以看出：傅里叶变换识别固有频率用于分段积分法进行阻尼识别时存在一定误差。而本文方法求解的固有频率用于分段积分法进行阻尼识别时，识别结果准确，在3种阻尼比情况下相对误差均在1 %以内。

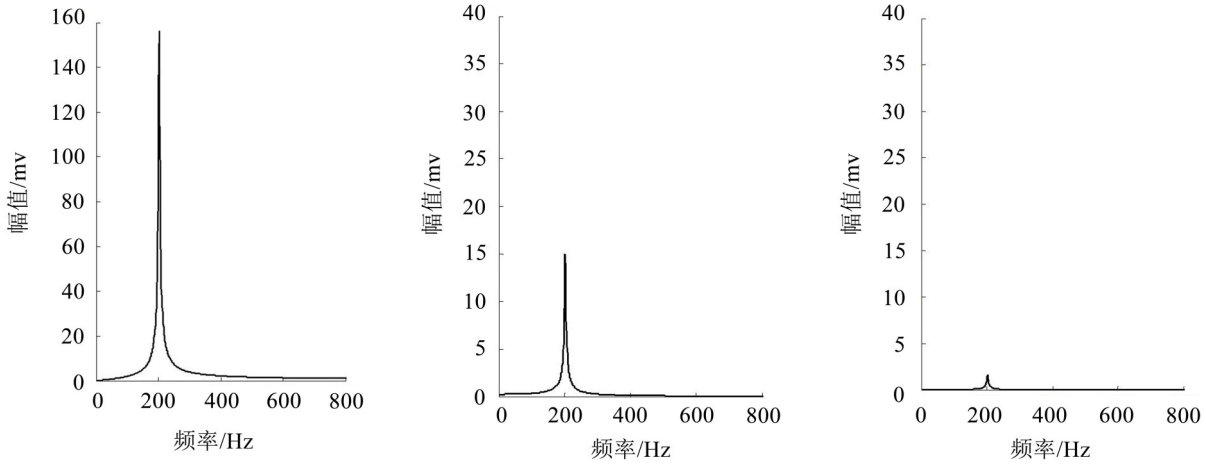
得到信号的固有频率ω_d和衰减指数n以后，用公式(17)可以计算得到整个阻尼信号的幅值和初相位，进行信号重构。现进行同样的对比，一种是使用傅里叶变换识别的固有频率用于识别阻尼进而得到重构信号，另一种是采用本文方法求解的固有频率用于识别阻尼进而得到重构信号。

选取阻尼比为0.01的衰减信号为算例，信号幅值A = 2.0，初始相位ϕ = 0.3 rad，信号无阻尼固有频率f_n=201.36 Hz。采用傅里叶变换识别固有频率进而计算得到的信号幅值和初相位分别为：A_1 = 2.095，ϕ_1 = 0.381 rad。采用本文方法求解固有频率进而计算得到的信号幅值和初相位分别为：A_2 = 2.011，ϕ_2 = 0.294 rad。可见由于本文方法得到了更准确的信号固有频率和衰减系数，幅值和相位的求解也更加准确。为了考察整个阻尼信号提取的效果，使用原真实信号减去重构信号并作频谱分析，两种方法得到的剩余频谱如图1所示。

从图1可以看出，使用傅里叶变换识别固有频率并进行阻尼识别后得到的重构信号存在一定误差，消减后的剩余信号频谱中尚有约15个单位的剩余幅值，信号提取不够完全。而使用本文方法改进频率识别后得到的重构信号比较准确，剩余频谱峰值几乎为零。说明本文方法求解出准确的固有频率有意义，阻尼识别精度提高，进而在信号的提取分析方面也更为准确，优势更明显。

表2　阻尼识别结果对比

阻尼比ζ	用傅里叶变换识别的固有频率进行阻尼识别		用本文方法识别的固有频率用于阻尼识别	
	识别结果	相对误差/(%)	识别结果	相对误差/(%)
0.007	0.007 92	13.13	0.007 01	0.11
0.01	0.010 92	9.22	0.010 01	0.10
0.02	0.020 79	3.96	0.020 01	0.06



(a) 原始信号频谱　(b) 用傅里叶变换识别固有频率并提取信号后的剩余频谱　(c) 用本文方法识别固有频率并提取信号后的剩余频谱

图 1 原信号频谱与两种方法消减后的剩余信号频谱

3 齿轮室盖阻尼识别试验

齿轮室盖是发动机上的主要薄壁件[11]，工作过程中易产生振动和辐射噪声。准确识别齿轮室盖模态阻尼可以为控制发动机的振动噪声提供依据，常有这方面的工程应用研究[12–13]。本文针对某型号发动机齿轮室盖进行了阻尼识别。实验过程如下：用橡皮绳将齿轮室盖水平吊置于实验台架上，使用型号为B＆K 8848的铜质力锤竖直敲击齿轮室盖中部，通过安装于齿轮室盖上型号为B＆K 4321的加速度传感器记录齿轮室盖振动信号，实验现场照片如图2所示。

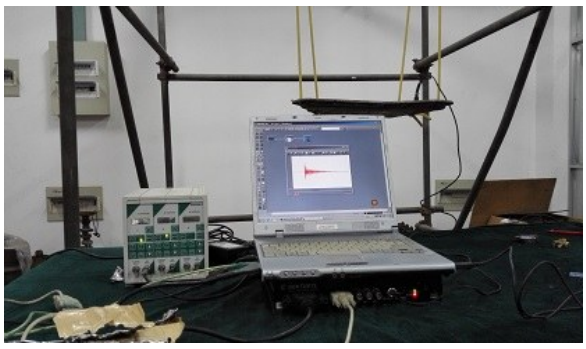


图 2 齿轮室盖阻尼实验照片

试验中的采样频率为2 000 Hz，齿轮室盖响应信号频谱如图3所示。

从图3的齿轮室盖信号频域图中可清晰看出，响应信号具有4阶模态。第1阶模态在200 Hz附近，以此为例，采用3种方法对其进行固有频率和阻尼比的识别，识别结果见表3。

运用公式(17)分别计算出信号幅值与相位，重构出第1阶模态信号，然后将其从整个振动衰减信号中减去，得到剩余信号频谱，结果如图4所示。

综合表3和图4可以看出，由于传统的半功率带宽法和傅里叶变换识别固有频率的分段积分法识别固有频率不准确，导致阻尼识别有偏差，在此基础上进行信号提取误差结果明显，从图4(a)、图4(b)可以看出，两种方法提取第1阶模态信号后仍有较大剩余幅值。而采用本文方法识别固有频率的分段积分法提取第1阶模态信号后，如图4(c)所示，几乎没有剩余频谱。说明本文方法计算出的信号固有频率和阻尼比更为准确有效，在信号提取方面更显优势。

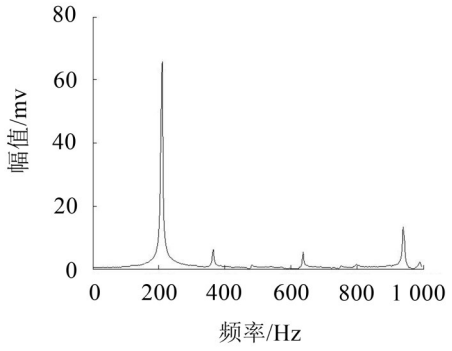


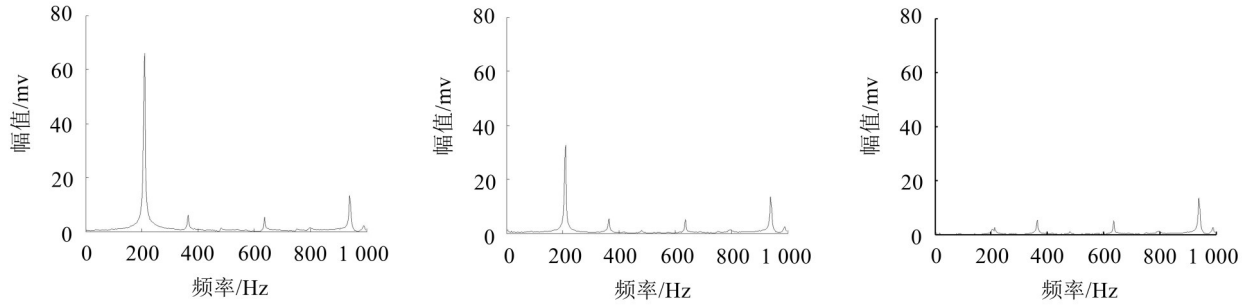
图 3 齿轮室盖信号频域图

表 3 第1阶模态识别结果

方法	固有频率识别结果f_d/Hz	阻尼比识别结果ζ
半功率带宽法	210	0.017 86
傅里叶变换识别频率的分段积分法	210	0.009 58
本文方法识别频率的 分段积分法	208.807	0.005 11

运用本文方法识别其余各阶模态的固有频率和阻尼比，识别结果如表4所示。

由以上的识别结果可以看出，齿轮室盖振动信号的其它3阶模态分别在363.920 Hz、636.650 Hz



(a) 使用半功率带宽法　(b) 使用傅里叶变换识别固有频率的分段积分法 (c) 使用本文方法识别固有频率的分段积分法

图 4 减去第1阶模态后剩余信号频谱

表 4 齿轮室盖阻尼识别结果

模态阶次	固有频率f_d/Hz	阻尼比ζ
2	363.920	4.516×10^{-03}
3	636.650	1.905×10^{-03}
4	940.545	1.601×10^{-03}

和940.545 Hz处，对应的阻尼比分别为0.004 516、0.001 905和0.001 601。

进一步考察识别的准确性，同样运用公式（17）计算出各阶模态幅值与相位角，据此重构各阶模态信号，将各阶模态从振动信号中减去，观察剩余信号频谱，如图5所示。

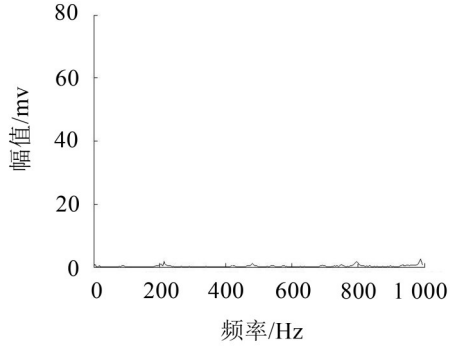


图 5 减去4阶模态后剩余信号频谱

由图5可以看出，减去相应的模态信号后，剩余信号频谱中已无明显对应峰值，表明本文方法对2、3、4阶模态信号的识别结果也是准确的。

4 结 语

本文提出一种准确求解振动衰减信号有阻尼固有频率的方法，将准确求得的固有频率用于分段积分法进行阻尼识别。其特点有：

（1）识别精度高，在大、小阻尼情况下均能够准确识别阻尼比；由于固有频率和阻尼比的准确识别，整个阻尼衰减信号的识别和提取精度也相应提高。

（2）固有频率和阻尼均是在傅里叶变换后通过相应的关系公式计算得到，不需要优化搜索，计算速度快，工程实用性好。

将本方法运用于发动机齿轮室盖的阻尼识别，结果表明，此方法准确识别出了齿轮室盖的固有频率和阻尼。

参考文献：

[1] 李晖，孙伟，张永峰，等. 悬臂薄板结构阻尼特性几种测试方法的比较[J]. **中国工程机械学报**，2013，11(4)：347-353.

[2] 应怀樵，李惠彬，沈松. 半功率带宽法与INV阻尼计法求阻尼比的研究[J]. **噪声与振动控制**，2006，26(2)：4-6.

[3] 范兴超, 纪国宜. 基于希尔伯特变换结构模态参数识别[J]. **噪声与振动控制**，2014，34(3)：52-56.

[4] CHEN J, XU Y L, ZHANG R C. Modal parameter identification of Tsing Ma suspension bridge under Typhoon Victor: EMD-HT method[J]. **Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics**, 2004, 92(10): 805-827.

[5] 黄应来，董大伟，闫兵. 密集模态分离及其参数识别方法研究[J]. **机械强度**，2009，31(1)：8-13.

[6] TAN J B, LIU Y, WANG L, et al. Identification of modal parameters of a system with high damping and closely spaced modes by combining continuous wavelet transform with pattern search[J]. **Mechanical Systems & Signal Processing**, 2008, 22(5): 1055-1060.

[7] 赵晓丹，张中业，骆英. 基于内积运算与迭代算法的密集模态阻尼识别[J]. **农业机械学报**，2011，42(4)：206-210.

[8] 赵晓丹，徐俊杰，王西富. 利用分段积分识别阻尼比研究[J]. **振动与冲击**，2015，34(20)：109-114.

[9] 刘进明，应怀樵. FFT谱连续细化分析的傅立叶变换法[J]. **振动工程学报**，1995，8(2)：162-166.

[10] 邢家省，张愿章. 应用傅里叶级数展开定理证明推广的黎曼—勒贝格引理[J]. **河南科学**，2013(3)：253-25.

[11] 孙燕华，唐立平，李薇. 发动机齿轮室盖液压自动夹具设计[J]. **机床与液压**，2011，39(16)：30-33.

[12] 曾志星，黄豪中，李松林. 一种低噪声齿轮室盖板的设计方法[J]. **内燃机工程**，2016，37(6)：126-132.

[13] 胡志胜，李波，陈玮. 基于模态分析的发动机齿轮室盖优化设计[J]. **汽车工程师**，2011(7)：59-61.