

文章编号:1006-1355(2019)01-0140-06

有砟轨道动力性能分析的频域方法

韩 锋¹, 顾 颖², 古 松², 赵 宇³, 张 迅³

(1. 中铁建设集团有限公司 基础事业部, 北京 100131;
2. 西南科技大学 土木工程与建筑学院, 四川 绵阳 621010;
3. 西南交通大学 土木工程学院, 成都 610031)

摘要: 建立有砟轨道的三层连续弹性支承模型, 推导钢轨、轨枕和道床的运动方程, 并在频域内求得简谐激励下的稳态响应。再引入轮轨相互作用频域模型, 并借助动柔度法计算轮轨力。在此基础上, 采用 MATLAB 平台自编程序, 实现轨道不平顺激励下的频域分析。在案例分析中, 综合考虑轮轨力、力传递率、轨道各部件的振动等指标, 对弹性扣件、枕下弹性垫板、复合轨枕、道砟垫以及它们的组合等多种减振措施进行对比。结果表明: 减振措施使得系统的固有频率发生改变, 进而导致各指标在不同频率范围出现复杂的变化规律; 相比于弹性扣件, 枕下弹性垫板和道砟垫表现出更好的综合效果, 而复合轨枕的减振效果有限。

关键词: 振动与波; 有砟轨道; 动力性能; 频域; 减振

中图分类号: U213.2

文献标志码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2019.01.027

A Frequency Domain Approach for Dynamic Performance Analysis of Ballasted Track

HAN Feng¹, GU Ying², GU Song², ZHAO Yu³, ZHANG Xun³

(1. Infrastructure Business Division, China Railway Construction Group Co. Ltd.,
Beijing 100131, China;
2. School of Civil Engineering and Architecture, Southwest University of Science and Technology,
Mianyang 621010, Sichuan China;
3. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract : A triple-layer continuously supported ballasted track model is built, and the kinematic equations of the rail, sleeper and ballast are derived. The steady-state responses of the model under harmonic excitation are obtained in the frequency domain. Then, the wheel/rail interaction model in the frequency domain is introduced, and the wheel/rail force is solved based on the dynamic flexibility method. The dynamic performance of the ballasted track induced by track irregularities is solved in frequency domain based on MATLAB programming. In the case study, the indexes of wheel/rail force, force transmissibility, track components vibrations are employed to assess the effects of vibration reduction measures such as adding elastic fasteners, laying soft baseplate under the sleepers, using composite sleepers, ballast mats and their combinations. Results show that the vibration reduction measures can change the ballasted track's natural frequency and cause the complex variation of these indexes in different frequency ranges. Compared to the measure of adding elastic fasteners, the soft baseplate under the sleepers and the ballast mats have a better comprehensive effect, while the composite sleepers have limited vibration reduction effect.

Keywords : vibration and wave; ballasted track; dynamic performance; frequency domain; vibration reduction

收稿日期:2018-04-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51778534);

北京市科技计划课题资助项目(Z171100002117001)

作者简介:韩锋(1976-),男,吉林省和龙市人,教授级高级工程师,从事铁路站房工程的科研和技术管理工作。

通信作者:张迅(1985-),男,湖北省荆门市人,副教授,博士,从事铁路减振降噪研究。

E-mail: zhxunxun@swjtu.edu.cn

有砟轨道是传统的轨道结构,其在高速铁路中同样扮演着重要的角色。例如:在部分高架车站、大跨度桥梁、穿越地震断裂带的隧道等不宜铺设无砟轨道的地段,我国大量采用了有砟轨道;德国、法国等高速铁路的大部分地段也使用了有砟轨道^[1-3]。

随着列车速度不断提高、轴重不断增大,有砟轨道在使用中出现了不少问题。例如:道砟颗粒发生破碎和粉化,大大增加了轨道的养护维修工作量,还

会严重影响行车安全性和舒适性;在环境敏感地段,轨道和下部桥梁、高架站房结构的振动剧烈,并向周围快速传递,产生严重的环境振动污染。研究表明^[1]:增加有砟轨道的弹性,可以在一定程度上控制道砟粉化速率过快以及其所引起的一系列问题,且可以最大限度地减小振动对线路和环境的不利影响。

许多学者对增加有砟轨道弹性的措施开展了研究。例如:Faure等^[4]采用数值分析和现场试验的方法,研究了低刚度扣件对环境振动控制的效果;谭诗宇等^[5]采用有限元法建立了车辆-有砟轨道-桥梁空间耦合动力学模型,讨论了道砟垫对轨道和桥梁动力响应的影响;蔡小培等^[6]采用有限元法建立了车辆-有砟轨道-隧道空间耦合动力学模型,讨论了弹性轨枕对系统动力响应的影响;Ma等^[7]通过锤击试验和现场试验研究了有砟梯形轨枕轨道的减振性能。不难发现,以往的研究大多采用了复杂的有限元模型,且一般先在时域内进行仿真分析,再通过时频转化得到频域响应。这种方法不仅计算工作量大,且不能快速获得关键参数对系统动力响应的影响规律。

为了摒弃时域分析带来的不便,本文建立频域内的有砟轨道动力分析模型,推导运动方程,引入评价轨道隔振性能的物理量,并基于MATLAB平台编制程序实现数值分析。在此基础上,通过案例分析,对比各种增加有砟轨道弹性的措施对系统动力响应的影响规律。本文所提出的方法可为减振降噪产品的参数优化、减振降噪性能评估等提供参考。

1 有砟轨道垂向振动模型

有砟轨道由钢轨、扣件、轨枕及道床等组成。实际工程中通常采取增设枕下弹性垫板、道砟垫等技术措施进行减振降噪。

在有砟轨道结构中,钢轨、轨枕和道床都将参与振动。本文仅考虑垂向振动。取1/2轨道建立三层连续弹性支承模型,如图1所示。

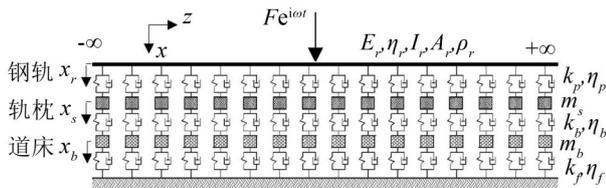


图1 三层连续弹性支承模型

其中:钢轨简化为无限长欧拉梁;轨枕、道床视为刚体;钢轨与轨枕之间、轨枕与道床之间、道床与基础之间通过弹簧-阻尼元件进行连接。偏于安全

考虑,忽略道砟之间的啮合作用,由此引起的误差约在5%左右^[8]。

在图1中,作用于钢轨 z 处的简谐力记为 $F e^{i\omega t}$,其中: F 为简谐力幅值, i 为单位虚数, ω 为圆频率, t 为时间。时域内钢轨、轨枕和道床的运动方程分别为

$$\rho_r A_r \frac{\partial^2 x_r}{\partial t^2} + E_r^* I_r \frac{\partial^4 x_r}{\partial z^4} + k_p^* (x_r - x_s) = F e^{i\omega t} \delta(z) \quad (1)$$

$$m_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} + (k_p^* + k_b^*) x_s - k_p^* x_r - k_b^* x_b = 0 \quad (2)$$

$$m_b \frac{\partial^2 x_b}{\partial t^2} + (k_b^* + k_f^*) x_b - k_b^* x_s = 0 \quad (3)$$

式中: ρ_r 、 A_r 、 I_r 分别为钢轨的密度、截面积和惯性矩; E_r^* 为钢轨的复弹性模量, $E_r^* = E_r(1 + i\eta_r)$, η_r 为钢轨的损耗因子; δ 为Dirac函数; m_s 和 m_b 分别为轨枕和道床质量(换算为每延米); x_r 、 x_s 和 x_b 分别为钢轨、轨枕和道床位移; k_p^* 、 k_b^* 和 k_f^* 分别为扣件、道床和基础的复支承刚度(换算为每延米), $k_p^* = k_p(1 + i\eta_p)$, $k_b^* = k_b(1 + i\eta_b)$, $k_f^* = k_f(1 + i\eta_f)$, η_p 、 η_b 和 η_f 分别为扣件、道床和基础的损耗因子。

将钢轨、轨枕和道床的稳态响应分别记为 $x_r = X_r e^{i\omega t}$ 、 $x_s = X_s e^{i\omega t}$ 和 $x_b = X_b e^{i\omega t}$, X_r 、 X_s 和 X_b 分别为其振动幅值。式(1)~式(3)对应的频域运动方程可写为

$$-\rho_r A_r \omega^2 X_r + E_r^* I_r X_r'''' + k_p^* (X_r - X_s) = F \delta(z) \quad (4)$$

$$-k_p^* X_r + (k_p^* + k_b^* - m_s \omega^2) X_s - k_b^* X_b = 0 \quad (5)$$

$$-k_b^* X_s + (k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2) X_b = 0 \quad (6)$$

联立式(4)~式(6),并应用Laplace变换和留数法,解得有砟轨道各部件的位移响应为

$$X_r = \frac{-iF}{4E_r^* I_r k^3} \left(e^{-ik|z-z_1|} - i e^{-k|z-z_1|} \right) \quad (7)$$

$$X_s =$$

$$\frac{(k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2) k_p^*}{\left[(k_p^* + k_b^* - m_s \omega^2)(k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2) - (k_b^*)^2 \right]} X_r \quad (8)$$

$$X_b = \frac{k_b^*}{k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2} X_s \quad (9)$$

其中:

$$k = \left(\frac{\rho_r A_r \omega^2 - k_{eq}}{E_r^* I_r} \right)^{0.25} \quad (10)$$

$$k_{eq} = \frac{k_p^* \left[(k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2)(k_b^* - m_s \omega^2) - (k_b^*)^2 \right]}{\left[(k_p^* + k_b^* - m_s \omega^2)(k_b^* + k_f^* - m_b \omega^2) - (k_b^*)^2 \right]} \quad (11)$$

式中: z 为简谐力作用位置; z_1 表示考察位置; k 为钢轨波数; k_{eq} 为“扣件-轨枕-道床”系统的等效刚度。

传入基础中的支承反力随位置 z 变化,且由于相位差异将使得直接求和时出现抵消现象。为此,

本文从能量传递的角度出发,定义传递到基础中的总反力为各位置处基础支承反力平方和的平方根,即

$$F_{f, rss} = \sqrt{\sum_{n=-N}^{n=N} |k_f^* X_b(z_n) \Delta z_n|^2} \quad (12)$$

式中: Δz_n 为离散化后轨道微元段的长度, $z_n = n\Delta z_n$ 为第 n 个微元段中心的纵向位置。

引入力传递率 T_{rss} 这一无量纲物理量,用于评价轨道的隔振性能^[9],其定义为传递至基础的总反力与输入至钢轨的简谐力的比值,即

$$T_{rss} = F_{f, rss}/F \quad (13)$$

2 轮轨相互作用

在轮轨相互作用频域模型中(图2),可将轮轨接触简化为线性赫兹接触。

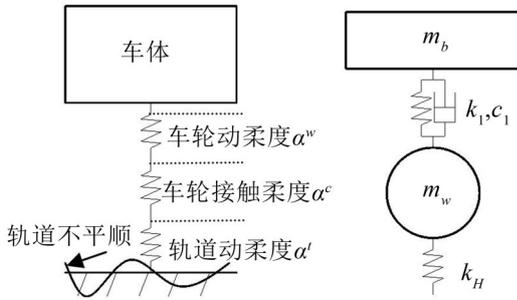


图2 轮轨相互作用模型

此时,车轮动柔度、轮轨线性接触柔度和轨道动柔度三者之和影响轮轨力。借助动柔度法可得到频域内的轮轨力^[9]

$$F_{w/r} = \frac{-\Delta}{\alpha^w + \alpha^c + \alpha^t} \quad (14)$$

式中: $F_{w/r}$ 为轮轨力; Δ 为轨道不平顺; α^w 、 α^c 和 α^t 分别为车轮动柔度、轮轨线性接触柔度和轨道动柔度;轮轨线性接触柔度 $\alpha^c = 1/k_H$, k_H 为赫兹接触刚度。

车辆由车体、转向架、一系悬挂、二系悬挂、轮对等部件构成。二系悬挂的频率通常在1 Hz左右,所以在研究轨道隔振性能时常常忽略二系悬挂以上部件的影响,由此导致的误差很小。利用D'Alembert原理建立转向架-车轮两自由度系统的动力方程,可求得车轮在单位力作用下的位移(即动柔度)^[10]

$$\alpha^w = \frac{k_1 + i\omega c_1 - m_b \omega^2}{m_w m_b \omega^4 - (k_1 + i\omega c_1)(m_w + m_b) \omega^2} \quad (15)$$

式中: k_1 和 c_1 分别为车辆一系悬挂刚度和阻尼系数; m_w 为车轮及其上的非悬挂质量; m_b 为1/4转向架质量。

轨道动柔度描述单位简谐力作用于钢轨上时,激励力作用点的钢轨位移。因此,由式(7)可得

$$\alpha^t = \frac{-1-i}{4E_r^* I_r k^3} \quad (16)$$

3 案例分析

采用MATLAB平台自编程序,实现有砟轨道道力性能的频域分析。限于篇幅,本文主要从荷载传递和振动传递两方面对不同减振措施的效果进行对比。前者主要分析轮轨力、车轮作用位置的基础反力(此位置的基础反力最大)和力的传递率。后者主要分析轨道各部件的振动位移、加速度等。

3.1 计算参数

高速铁路有砟轨道多采用弹条IV型扣件、III型钢筋混凝土轨枕。所考虑的车型为CRH380A,车速取350 km/h。相关计算参数见表1。

轨道不平顺谱采用ISO 3095:2005的建议值,其表达式见式(17)^[11]。由于轨道隔振性能主要考察几百赫兹以下的低频振动,因此将分析频率的上限设为500 Hz。

$$20 \lg \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right) = \begin{cases} 18.45 \lg \lambda + 27.2, & \lambda \geq 0.01 \\ -9.7, & \lambda < 0.01 \end{cases} \quad (17)$$

式中: Δ_0 为轨道不平顺的参考值,取 10^{-6} m; λ 为轨道不平顺的波长, $\lambda = 2\pi v/\omega$, v 为车速。

本文主要考虑以下增加有砟轨道弹性的措施^[1]:弹性扣件、枕下弹性垫板、复合轨枕、道砟垫,以及它们的组合,相关参数见表1。

在分析过程中,未考虑轨道各部件力学性能的温变、频变特性,即轨道各部件的复弹性模量、刚度及损耗因子在计算中取为常数。计算工况见表2。

3.2 单一措施的对比

图3给出了5种计算参数得到的轮轨力、车轮作用位置的基础反力和力传递率。

不同减振措施将使得钢轨的动柔度发生改变,进而影响轮轨力。文献[9]—[10]指出:一般在100 Hz以内,轮轨力将出现峰值,该峰值所在的频率对应于“车轮-轨道”系统的固有频率(车轮视为质量块,轨道等效为弹簧)。从图3(a)可以看出:

(1) 在100 Hz以内,各措施对应的轮轨力峰值频率的范围与相关研究的结论一致。

(2) 频率大于200 Hz以后,轮轨力随频率缓慢增加;除弹性扣件外,其它措施下的轮轨力差异不明显,表明弹性扣件有增大高频轮轨力的趋势。

(3) 弹性扣件将显著降低“车轮-轨道”系统的固有频率及其轮轨力幅值。

(4) 枕下弹性垫板、复合轨枕和道砟垫将使得“车轮-轨道”系统的固有频率略微减小。就控制轮轨力的幅值而言,三者相比,枕下弹性垫板与道砟垫

表1 计算参数

CRH 380A	转向架质量/kg	3 060	弹条IV型 扣件	刚度/(N·m ⁻¹)	6.6×10 ⁷	道床	弹性模量/Pa	1.1×10 ⁸
	轮对质量/kg	1517		损耗因子	0.25		支撑刚度/(N·m ⁻¹)	1.38×10 ⁸
	一系悬挂刚度/(N·m ⁻¹)	1.772×10 ⁶	III型轨枕	间距/m	0.6	损耗因子	1.0	
	一系悬挂阻尼(N·s/m)	2×10 ⁴		1/2质量/kg	170	参振质量/kg	531.4	
CHN60 钢轨	轮轨接触刚度/(N·m ⁻¹)	1.4×10 ⁹	枕下	刚度/(N·m ⁻¹)	6×10 ⁷	USM4015 道砟垫	面刚度/(Pa·m ⁻¹)	1.5×10 ⁸
	弹性模量/Pa	2.1×10 ¹¹	弹性垫板	损耗因子	0.25		损耗因子	0.25
	惯性矩/m ⁴	3.2×10 ⁵	复合轨枕	弹性模量/Pa	1.24×10 ⁹	刚度/(N·m ⁻¹)	1×10 ⁷	
	密度/(kg·m ⁻³)	7.85×10 ³		损耗因子	0.1	弹性扣件	损耗因子	0.25
截面积/m ²	7.745×10 ³	1/2质量/kg	53	间距/m	0.6			

表2 计算工况

	工况名称	工况描述
单一措施	无减振措施	弹条IV型扣件,III型轨枕
	弹性扣件	仅使用弹性扣件
	枕下弹性垫板	仅使用枕下弹性垫板
	复合轨枕	仅使用复合轨枕
混合措施	道砟垫	仅使用道砟垫
	枕下弹性垫板+道砟垫	同时使用枕下弹性垫板和道砟垫
	复合轨枕+道砟垫	同时使用复合轨枕板和道砟垫

的效果相当,而复合轨枕的效果有限。

车轮作用位置的基础反力往往最大。为此,图3(b)给出了该位置处的基础反力,可以看出:

(1) 在轮轨力峰值频率处,基础反力出现峰值。此后随着频率增加,基础反力逐渐降低。

(2) 在300 Hz以内,复合轨枕可以略微降低基础反力;在300 Hz以后,基础反力反而有所增加。

(3) 总体上,弹性扣件、枕下弹性垫板和道砟垫均使得基础反力大大降低,且弹性扣件的效果最好。频率超过250 Hz以后,枕下弹性垫板与弹性扣件的效果相当。

传递至基础的反力在车轮作用位置沿着轨道的前、后方向衰减。力传递率从总体上描述了不同位置处基础反力与轮轨力的比值,可综合反映不同轨

道的隔振性能。从图3(c)可以看出:

(1) 在“车轮-轨道”系统的固有频率附近,各减振措施对应的力传递率均有所增加,且弹性扣件的增量最为明显,复合轨枕次之。

(2) 随着频率增加(约200 Hz以后),各减振措施对应的力传递率均小于普通有砟轨道。其中,枕下弹性垫板和弹性扣件的力传递率相当,道砟垫次之,复合轨枕反而有增大力传递率的趋势。

图4给出了5种计算参数得到的钢轨动位移、道床动位移和道床加速度。

钢轨振动大小一方面会对行车安全性造成影响,另一方面会带来轮轨噪声的变化。从图4(a)可以看出,各减振措施主要影响100 Hz范围的钢轨动位移,且弹性扣件将使得钢轨动位移显著增加。

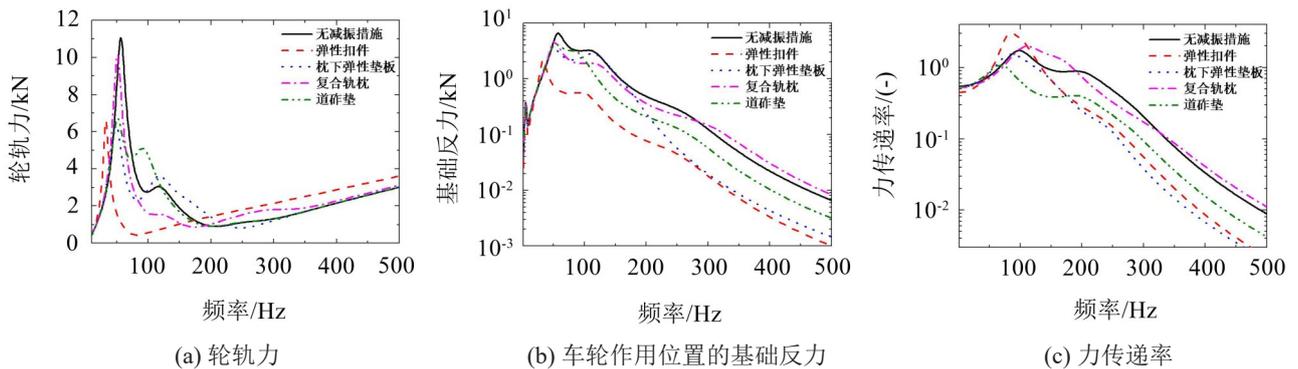


图3 单一措施对荷载传递的影响

从图4(b)可以看出,各减振措施主要影响200 Hz范围的道床动位移,且由于降低了轨道结构整体刚度,道砟垫使得道床位移在“车轮-轨道”系统的固有频率附近有所增加。

研究表明^[5-6]:道床的残余变形与道床振动加速度的平方成正比。减小道床的振动加速度对于保持轨道几何形位以及减小线路养护维修工作量均具有积极的作用。从图4(c)可以看出:

(1) 相比动位移,道床加速度的峰值频率向高频移动,从而在100 Hz~150 Hz范围出现峰值。频率超过400 Hz以后,各减振措施对应的道床加速度逐渐接近。

(2) 在200 Hz范围内,各减振措施均能在一定程度上降低道床加速度,且弹性扣件和枕下弹性垫板的效果最好,道砟垫次之,复合轨枕的效果有限。

综合图3和图4,不难发现:

(1) 弹性扣件使得各指标在“车轮-轨道”系统的固有频率附近变化最为剧烈;尽管低频范围的轮轨力得以降低,但钢轨动位移显著增大。

(2) 枕下弹性垫板和道砟垫的综合效果较好,即一方面会降低轮轨力和传递至基础的总反力,另一方面又不会使得轨道各部件的振动响应剧烈变化。

(3) 相比其它三种减振措施,复合轨枕对各指标的影响有限,但可起到少量的减振效果。

3.3 混合措施的对比如

进一步对表2所列混合措施的工况进行计算。限于篇幅,图5仅给出了轮轨力、力传递率和道床加速度的对比结果。可以看出:

(1) 相比单一措施,两种混合措施将会使得轮轨力在“车轮-轨道”系统的固有频率附近进一步降低。

(2) “枕下弹性垫板+道砟垫”这一混合措施具有最佳的隔振效果,使得传递至基础的荷载在100 Hz以后迅速衰减。

(3) 相比单一措施,两种混合措施使得道床加速度的峰值频率向低频移动,且“枕下弹性垫板+道砟垫”这一混合措施反而会增加峰值频率处的道床加速度。

(4) “复合轨枕+道砟垫”这一混合措施与道砟垫具有总体相当的效果。例如:在150 Hz以前,前者的力传递率和道床加速度比后者大;在150 Hz~400 Hz范围,前者的力传递率和道床加速度比后者小;频率更高时,二者逐渐趋于一致。

4 结语

(1) 有砟轨道为多层部件组成的系统,其动力性能受各个部件的综合影响。插入减振元件后(如:弹性扣件、枕下弹性垫板、道砟垫等),将改变原系统的固有频率,进而使得轮轨力、力传递率、各部件的振

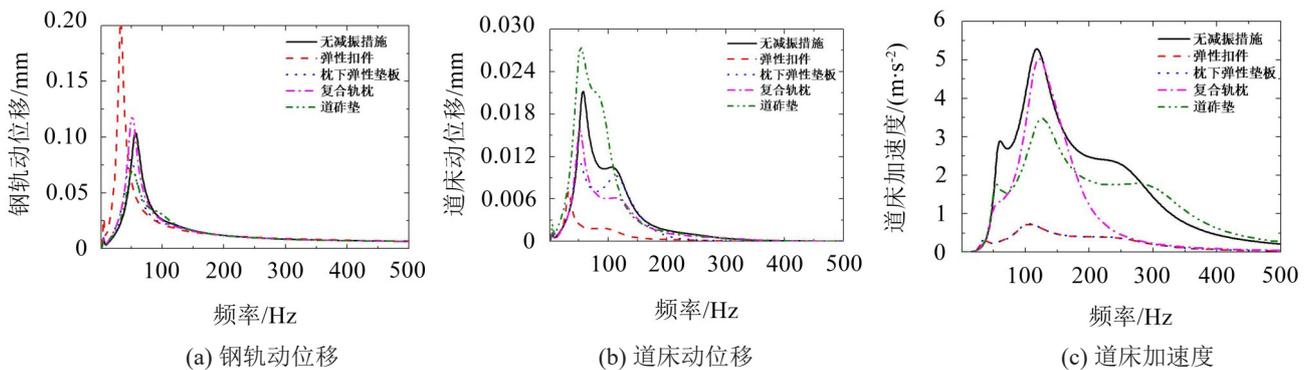


图4 单一措施对振动传递的影响

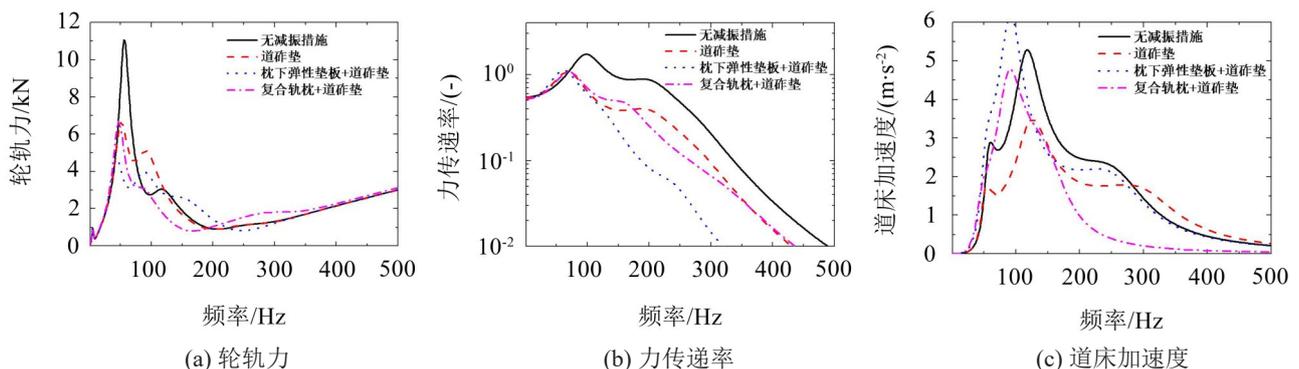


图5 混合措施的综合影响

动等指标在不同频率范围出现复杂的变化规律。

(2) 综合考虑轮轨力、力传递率、各部件的振动等指标,相比于弹性扣件,枕下弹性垫板和道砟垫表现出更好的综合效果。

(3) 复合轨枕对各指标的影响有限,但可起到少量的减振效果。

(4) “枕下弹性垫板+道砟垫”这一混合措施反而会增加峰值频率处的道床加速度。“复合轨枕+道砟垫”这一混合措施的效果与单独使用道砟垫的效果相当。

减振措施的实施应综合考虑动力性能、耐久性、经济性、减振降噪需求等因素。相比于时域分析方法,本文所提出的频域分析方法在理解轨道动力性能、快速实施减振参数优化等方面具有明显的优势。

参考文献:

- [1] 郑建. 增加有砟轨道弹性的措施及其对轨道力学性能影响[D]. 成都:西南交通大学,2017.
- [2] PAIXÃO A, VARANDAS J N, FORTUNATO E, et al. Numerical simulations to improve the use of under sleeper pads at transition zones to railway bridges[J]. **Engineering Structures**, 2018, 164: 169-182.
- [3] MATSUOKA K, COLLINA A, SOGABE M. Dynamic simulation and critical assessment of a composite bridge in high-speed railway[J]. **Procedia Engineering**, 2017, 199: 3027-3032.
- [4] FAURE B, BONGINI E, LOMBAERT G, et al. Vibration mitigation by innovative low stiffness rail fastening systems for ballasted track[M]// Nielsen J C O, Anderson D, Gautier P, et al. **Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems**. Berlin: Springer, 2015, 126: 627-634.
- [5] 谭诗宇,蔡小培,崔日新,等. 环境敏感区桥上有砟轨道铺设道砟垫的减振效果[J]. **振动与冲击**, 2017, 36(10): 38-44.
- [6] 蔡小培,谭诗宇,沈宇鹏,等. 隧道内有砟轨道铺设弹性轨枕的动力特性分析[J]. **铁道学报**, 2018, 40(1): 87-93.
- [7] MA M, LIU W N, LI Y L, et al. An experimental study of vibration reduction of a ballasted ladder track[J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit**, 2017, 231(9): 1035-1047.
- [8] 翟婉明,夏禾. 列车-轨道-桥梁动力相互作用理论与工程应用[M]. 北京:科学出版社,2011.
- [9] LI Z G, WU T X. Modelling and analysis of force transmission in floating-slab track for railways[J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit**, 2008, 222(1): 45-57.
- [10] 王党雄,李小珍,张迅,等. 轨道结构形式对箱梁中高频振动的影响研究[J]. **土木工程学报**, 2017, 50(8): 68-77.
- [11] LI Q, WU D J. Analysis of the dominant vibration frequencies of rail bridges for structure-borne noise using a power flow method[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2013, 332(18): 4153-4163.
- [11] BAMPTON M C, CRAIG J R R. Coupling of substructures for dynamic analyses[J]. **AIAA Journal**, 1968, 6(7): 1313-1319.
- [12] RUBIN S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis[J]. **AIAA Journal**, 1975, 13(8): 995-1006.
- [13] 王文亮,杜作润,陈康元. 模态综合技术短评和一种新的改进[J]. **航空学报**, 1979.
- [14] G I TALYOR. The pressure and impulse of submarine explosion waves on plates, Ministry of Home Security Report, FC235, 1941.
- [15] HUANG H. Transient interaction of plane acoustic waves with a spherical elastic shell[J]. **Acoust. Soc. Am.**, 1969, 45: 661-670.
- [16] JIN QIANKUN, DING GANGYI. A finite element analysis of ship sections subjected to underwater explosion[J]. **International Journal of Impact Engineering**, 2011, 38: 558-566.

(上接第98页)