

文章编号:1006-1355(2018)06-0007-05

部分可观测车辆系统非线性随机振动的最优控制

张 巍¹, 应祖光², 颜光锋²

(1. 浙江理工大学 经济管理学院实验中心, 杭州 310018;

2. 浙江大学 航空航天学院力学系, 杭州 310027)

摘要: 车辆运行过程的随机振动水平是评估其动力学性能的重要指标, 该振动对于车载器件能否正常工作具有极其重要的影响, 因此必需进行车辆随机振动控制。重型多轴车辆受空间限制其悬架采用可转动的斜杆支承, 且控制器如磁流变阻尼器也斜向安装在悬架与车轮之间, 导致系统呈现几何非线性, 其非线性随机振动控制方法与效果完全不同于普通车辆。同时由于不可避免的观测噪声, 导致出现部分可观斜杆支承车辆系统的非线性随机控制新问题。考虑车体与车轮的垂直耦合运动及斜支承杆的转动, 用拉格朗日方程建立车辆控制系统模型的运动微分方程, 转化为非线性的耦合振动方程, 同时建立包含测量噪声的系统观测方程, 构成一个部分可观系统的非线性随机最优控制问题; 根据推广的 Kalman 滤波方法得到关于估计状态的非线性随机系统方程, 再根据随机动态规划原理建立动态规划方程, 结合控制力的有界性, 得到基于系统估计状态的最优有界控制律; 通过受控与未控系统响应统计的比较评估控制效果, 数值计算结果表明该控制策略可有效降低具有观测噪声的采用斜杆支承与控制车辆系统在随机路面激励下的非线性随机振动, 并对于不同观测系数具有一定的鲁棒性。

关键词: 振动与波; 随机振动; 非线性车辆系统; 部分可观测; 最优控制

中图分类号: O324; O328; TB535

文献标志码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2018.06.002

Optimal Control of Nonlinear Stochastic Vibration of Partially Observable Vehicle Systems

ZHANG Wei¹, YING Zuguang², YAN Guangfeng²

(1. Laboratory Center, School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract : Stochastic vibration level of vehicles during driving is an important criterion to evaluate their dynamic performance. The stochastic vibration has a great impact on the working condition of vehicle devices, and therefore must be controlled. The suspension of heavy-duty multi-axle vehicles is supported aslant by rotatable levers because of the space restriction. The control devices such as MR dampers are also installed aslant between the suspension and wheels, which leads to the geometric nonlinearity of vehicle systems. The control strategy and effectiveness of the nonlinear stochastic vibration vehicles are totally different from those of ordinary vehicles. Furthermore, because of the inevitable state measurement noise, the rotatable-inclined-support vehicle control becomes a new problem of partially observable nonlinear stochastic control. In this paper, the vertical coupling motion between the suspension and wheels and the rotation of the inclined support levers are considered. The differential equations of motion of the vehicle system are derived according to the Lagrangian equations, and then transformed into nonlinear coupled vibration equations. Meanwhile, the state observation equations with measurement noise are given. These equations can describe the partially observable nonlinear stochastic control problem. The nonlinear stochastic system equation for estimation states is obtained based on the extended Kalman filter. Then, the dynamic programming equation is obtained based on the stochastic dynamical programming principle. The optimal bounded control law for the estimation states is determined by the programming equation with the boundedness of control forces. The effectiveness of the control strategy is evaluated by comparing the response statistics of controlled and uncontrolled systems. Numerical results show that the proposed control strategy can effectively mitigate the nonlinear stochastic vibration of the rotatable-inclined-support vehicle system with noise observation under random road excitation by using MR dampers. The control effectiveness is robust for various observation parameters.

Keywords : vibration and wave; stochastic vibration; nonlinear vehicle system; partially observable; optimal control

收稿日期: 2018-03-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572279)

作者简介: 张巍(1965-), 女, 江苏省南通市人, 高级工程师, 主要研究方向为信息系统与控制。

E-mail: zhweihz@zstu.edu.cn

车辆运行过程的振动水平是评估其动力学性能的重要指标,该振动对于车载器件的正常工作具有极其重要的影响,因此必需进行车辆振动控制。由于路面不平度的随机性,车辆振动是随机的,需要进行随机振动控制。通常车辆由车轮、轴等垂直支承,系统一般是线性的。这类车辆的被动、主动与半主动控制已有很多研究^[1-6]。然而,一类特殊的重型多轴车辆受空间限制其悬架采用可转动的斜杆支承,从而导致系统的几何非线性^[7],其非线性随机振动控制方法与效果完全不同于普通车辆。对于反馈控制,还需要考虑状态观测,由于观测噪声不可避免,故不能由测量值直接确定系统状态,导致出现不完全观测或部分观测的控制问题^[8]。部分可观系统的非线性随机最优控制是一个极其困难的问题,研究成果非常有限,例如文献[9]在十分特殊的条件下给出一个控制策略,先将部分可观系统的非线性随机最优控制问题转化为完全可观线性系统的随机最优控制问题,再根据随机动态规划原理确定控制律。最近文献[10-11]发展了基于推广的Kalman滤波的非线性随机最优控制策略,可用于一般的部分可观系统的非线性随机最优控制,从而为斜杆支承车辆系统的振动控制提供了一个基本策略。

关于可转动斜杆支承车辆系统振动控制的研究非常有限,例如文献[7]通过多体动力学分析讨论了斜杆支承悬架的优化,因此需要进一步深入研究。实际上,在悬架与车轮间安装控制器,产生一对作用力是通常的措施,但受空间限制也只能类似于支承的斜向安装。控制器一般采用磁流变阻尼器^[12],从而导致一个半主动控制问题。控制器的作用力是有限的,它将成为一个控制约束^[13-14]。且控制目标是车体相对于不平路基准面的绝对振动水平,不同于通常关于结构强度的振动控制。总之,该部分可观斜杆支承车辆系统的非线性随机最优控制是一个新的有待于研究的重要问题。

本文研究上述具有观测噪声的斜杆支承与控制的非线性车辆系统,在随机路激励下振动的部分可观非线性随机最优有界控制新问题,考虑车体与车轮的垂直耦合运动及斜支承杆的转动,用拉格朗日方程建立车辆控制系统模型的运动微分方程,再转化为非线性的耦合振动方程,同时建立包含测量噪声的系统观测方程,组成部分可观系统的非线性随机最优控制问题;根据推广的Kalman滤波方法得到关于估计状态的非线性随机系统方程,再根据随机动态规划原理建立动态规划方程,考虑控制力的有界性约束,得到基于系统估计状态的最优有界控制律;最后,比较受控与未控系统的响应统计评估控制

效果,通过数值结果说明不同观测系数下本文方法的有效控制结果。

1 随机路激励非线性车辆系统振动控制的基本方程

可转动斜杆支承与控制的车辆系统简化模型如图1所示。

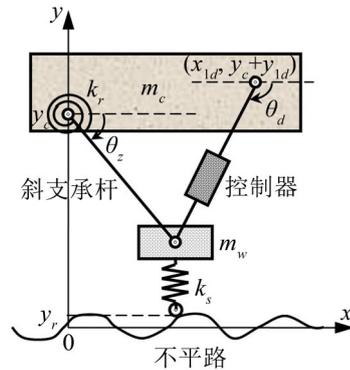


图1 斜杆支承与控制的车辆系统模型简图

车体质量为 m_c ,车轮质量为 m_w ,车体由可转动的斜杆支承,控制器如磁流变阻尼器也斜向装于其间。车体主要运动为垂直方向,用绝对坐标 y_c 描述。斜支承杆长度为 l_z ,其转动用转角 θ_z 描述。车轮产生水平与垂直运动,可通过 y_c 与 θ_z 表示。斜杆的扭转刚度为 k_r ,预设角度为 θ_0 。车轮的支承弹簧刚度为 k_s ,弹簧原长为 r_{w0} 。控制器上端的坐标为 $(x_{1d}, y_c + y_{1d})$,由几何关系可确定其转角 θ_d 与两端距离 l_d 。 x 轴表示路面基准线,路面不平度用 $y_r(x)$ 描述,当车辆前进速度为 v 时,受到的激励为 $y_r(vt)$,它通常是随机过程。

由第二类拉格朗日方程得到车辆系统的动力学方程

$$(m_c + m_w) \ddot{y}_c - m_w l_z \cos \theta_z \ddot{\theta}_z + m_w l_z \sin \theta_z \dot{\theta}_z^2 + (m_c + m_w) g + k_s (y_c - l_z \sin \theta_z - r_{w0}) = k_s y_r \quad (1)$$

$$m_w l_z^2 \ddot{\theta}_z - m_w l_z \cos \theta_z \ddot{y}_c + k_r (\theta_z - \theta_0) - m_w g l_z \cos \theta_z - k_s l_z (y_c - l_z \sin \theta_z - r_{w0}) \cos \theta_z - l_z F_d \sin (\theta_d - \theta_z) = -k_s l_z \cos \theta_z y_r \quad (2)$$

式中: g 是重力加速度, F_d 是控制器的作用力。对于磁流变阻尼器,根据Bingham模型,控制力为

$$F_d = -C_0 \dot{l}_d (\theta_z) - f_s \operatorname{sgn} (\dot{l}_d (\theta_z)) = -C_0 \dot{l}_d (\theta_z) - U \quad (3)$$

式中: C_0 是黏性阻尼系数, f_s 是屈服力, U 是半主动控制力,对于确定的阻尼器其值是有界的。

由几何关系得阻尼器两端距离与角度

$$l_d (\theta_z) = \sqrt{2l_z^2 (y_{1d} \sin \theta_z - x_{1d} \cos \theta_z) + x_{1d}^2 + y_{1d}^2 + l_z^2} \quad (4)$$

$$\sin (\theta_d - \theta_z) = \frac{y_{1d} \cos \theta_z + x_{1d} \sin \theta_z}{l_d (\theta_z)} \quad (5)$$

由方程式(1)至式(2)确定相应的静平衡关系,利

用此关系与式(3)至式(5),将方程式(1)至式(2)化为振动方程

$$\begin{aligned}
& \ddot{u} + \frac{m_w l_z \sin(\theta_0 + \alpha)}{m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)} \dot{\alpha}^2 + \\
& \frac{k_s [u + y_0 - l_z \sin(\theta_0 + \alpha) - r_{w0}] \sin^2(\theta_0 + \alpha)}{m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)} - \\
& \frac{k_s (y_0 - l_z \sin \theta_0 - r_{w0}) \sin^2 \theta_0}{m_c + m_w \sin^2 \theta_0} + \\
& \frac{k_r (\theta_0 + \alpha - \theta_{z0}) \cos(\theta_0 + \alpha)}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] l_z} - \\
& \frac{k_r (\theta_0 - \theta_{z0}) \cos \theta_0}{(m_c + m_w \sin^2 \theta_0) l_z} + C_0 l_z \cos(\theta_0 + \alpha) \cdot \\
& \frac{[y_{1d} \cos(\theta_0 + \alpha) + x_{1d} \sin(\theta_0 + \alpha)]^2}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] l_d^2(\theta_0 + \alpha)} \dot{\alpha} + \\
& \frac{[y_{1d} \cos^2(\theta_0 + \alpha) + x_{1d} \sin 2(\theta_0 + \alpha) / 2]}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] l_d(\theta_0 + \alpha)} U = \\
& \frac{k_s \sin^2(\theta_0 + \alpha)}{m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)} y_r(t) \\
& \ddot{\alpha} + \frac{m_w \cos(\theta_0 + \alpha) \sin(\theta_0 + \alpha)}{m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)} \dot{\alpha}^2 + \\
& \frac{k_r (m_c + m_w)}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] m_w l_z^2} \alpha - \\
& \frac{k_s m_c [u + y_0 - l_z \sin(\theta_0 + \alpha) - r_{w0}] \cos(\theta_0 + \alpha)}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] m_w l_z} + \\
& \frac{k_s m_c (y_0 - l_z \sin \theta_0 - r_{w0}) \cos \theta_0}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] m_w l_z} + C_0 (m_c + m_w) \cdot \\
& \frac{[y_{1d} \cos(\theta_0 + \alpha) + x_{1d} \sin(\theta_0 + \alpha)]^2}{[m_c m_w + m_w^2 \sin^2(\theta_0 + \alpha)] l_d^2(\theta_0 + \alpha)} \dot{\alpha} + \\
& \frac{(m_c + m_w) [y_{1d} \cos(\theta_0 + \alpha) + x_{1d} \sin(\theta_0 + \alpha)]}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] m_w l_z l_d(\theta_0 + \alpha)} U = \\
& - \frac{k_s m_c \cos(\theta_0 + \alpha)}{[m_c + m_w \sin^2(\theta_0 + \alpha)] m_w l_z} y_r(t)
\end{aligned} \quad (6)$$

式中中线位移 $u = y_c - y_0$, 角位移 $\alpha = \theta_{z0} - \theta_0$, y_0 与 θ_0 是静平衡时的线坐标和角坐标, 由静平衡关系确定。由方程式(6)至式(7)可见, 该车辆系统具有强几何非线性, 并受随机路激励。

设系统的观测量为速度 \dot{u} 与 $\dot{\alpha}$, 其中将包含测量噪声, 因此不能由测量值直接确定速度, 故称为不完全观测或部分观测。它可表示为

$$\varphi_1 = d_1 \dot{u} + e_{11} W_{s1}(t) \quad (8)$$

$$\varphi_2 = d_2 \dot{\alpha} + e_{12} W_{s2}(t) \quad (9)$$

式中: φ_1 与 φ_2 是观测量, d_1 与 d_2 是放大系数, W_{s1} 与 W_{s2} 是独立的单位强度观测噪声, e_{11} 与 e_{12} 表示其幅值。方程式(6)至式(9)构成一个部分可观测非线性随机振动的控制问题。

设系统状态向量 $Z = [u, \alpha, \dot{u}, \dot{\alpha}]^T$, 观测向量 $\Phi_s = [\varphi_1, \varphi_2]^T$, 则系统方程与观测方程可表示成矩阵形式

$$\dot{Z} = A(Z) + B(Z)U + FW(t) \quad (10)$$

$$\Phi_s = DZ + EW_s(t) \quad (11)$$

式中向量 A, B, F 由方程式(6)至式(7)确定, 矩阵 D 与 E 由方程式(8)至式(9)确定, W 是单位强度白噪声, $W_s = [W_{s1}, W_{s2}]^T$ 。 W 由随机路激励 y_r 确定, 对于一般不平路面, y_r 可通过滤波白噪声模拟, 其方程为

$$\dot{y}_r + 2\pi n_{00} v y_r = 2\pi n_{00} \sqrt{G_q(n_{00}) v} W(t) \quad (12)$$

式中空间截止频率 $n_{00} = 0.01 \text{ m}^{-1}$, 参考空间频率 $n_0 = 0.1 \text{ m}^{-1}$, G_q 是路面功率谱密度, 描述路面不平度, 按其不同值区分路面等级。此时, 通过扩展状态向量 Z , 系统方程仍可表示为式(10)。

2 基于推广 Kalman 滤波的随机最优有界控制律

部分可观测非线性随机控制问题表达式(10)至式(11)包括最优状态估计与基于估计状态的最优控制。最优估计的性能指标为

$$J_F(\hat{Z}) = E[l_F(Z - \hat{Z}) | \Phi_s] \quad (13)$$

式中: \hat{Z} 是估计的状态向量, $E[\cdot]$ 是期望算符, 函数 $l_F(\cdot) \geq 0$ 用于表达状态偏差。根据推广的 Kalman 滤波方法可得关于估计状态的非线性系统方程^[10-11]

$$\dot{\hat{Z}} = A(\hat{Z}) + B(\hat{Z})U + RD^T R_s^{-1} W_l(t) \quad (14)$$

式中: W_l 是高斯白噪声向量, 方差矩阵 $R_s = EE^T$, 估计偏差的方差矩阵 R 由下列方程确定

$$\dot{R} = \frac{\partial A(\hat{Z})}{\partial \hat{Z}} R + R \left[\frac{\partial A(\hat{Z})}{\partial \hat{Z}} \right]^T + FF^T - RD^T R_s^{-1} DR \quad (15)$$

因 R 较快趋向于平稳, 故可取方程式(15)的平稳解。

系统表达式(14)最优有界控制的性能指标为

$$J_c(U) = E \left[\int_0^{t_f} f_c\{Z(t)\} dt + \psi\{Z(t_f)\} \right] \quad (16)$$

式中: 函数 $f_c(Z) \geq 0$, t_f 是控制的终时, ψ 是控制终值。根据随机动态规划原理可得非线性随机系统表达式(14)与指标式(16)的动态规划方程^[10-11]

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + \min_U \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} (RD^T R_s^{-1} DR \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{Z}^2}) + \right. \\
& \left. [A(\hat{Z}) + B(\hat{Z})U]^T \frac{\partial V}{\partial \hat{Z}} + f_c(\hat{Z}) \right\} = 0
\end{aligned} \quad (17)$$

式中: V 是值函数, $\text{tr}[\cdot]$ 是迹算符。考虑控制力 U 的有界性, 通常有 $U \in [-U_a, U_a]$, U_a 为控制力界限。由式(17)左边第二项极小化可得最优有界控制律

$$U^* = -U_a \text{sgn} \left(B^T \frac{\partial V}{\partial \hat{Z}} \right) \quad (18)$$

对于半主动控制, 最优控制律还需满足式(3)。如果不满足时, 只能取为 0, 因此控制效果有所影响。

将式(18)代入式(17)得到值函数方程,求解之得到 V ,通常可取平稳解,从而由式(18)确定最优控制。再由方程式(14)计算估计系统响应,结合估计偏差的方差可计算原系统的响应统计。比较受控与未控系统的响应可评估控制效果。

3 数值结果

考虑具有观测噪声的受随机路激励的斜杆支承与控制的车辆系统模型,其基本参数为: $m_c=2\ 804\text{ kg}$, $m_w=104\text{ kg}$, $l_z=0.33\text{ m}$, $k_r=13\text{ kN}\cdot\text{m}/\text{rad}$, $k_s=2\times 10^7\text{ N}/\text{m}$, $\theta_{z0}=0.96\text{ rad}$, $r_{w0}=0.295\text{ m}$, $x_{1d}=0.621\text{ m}$, $y_{1d}=0.312\text{ m}$, $C_0=1\ 640\text{ kg}/\text{s}$, $e_{11}=0.03$, $e_{12}=0.03$, $d_1=1$, $d_2=1$, $U_a=2.5\text{ kN}$, 车速 $v=50\text{ km}/\text{h}$, B级不平路面。按照上述方法确定最优控制,用龙格-库塔法计算系统响应,再作统计,数值结果如图2至图6所示。图2为车辆在B级不平路面以 $50\text{ km}/\text{h}$ 前进时路面相对基准线波动位移随时间变化的曲线,表达了随机路激励。

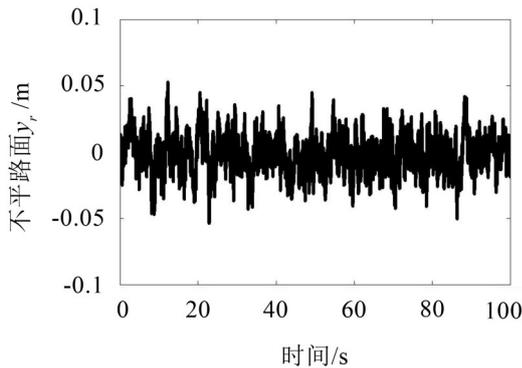


图2 车速 $50\text{ km}/\text{h}$ 工况下的不平路面

图3展示了半主动控制、主动控制与未控制时车体振动位移响应随时间的变化,其中主动控制是按式(18)确定的最优控制,半主动控制是按式(18)确定最优控制并满足阻尼器动力学约束式(3)。未控制时车体位移标准差为 $0.047\ 3\text{ m}$,半主动控制时的车体位移标准差为 $0.015\ 4\text{ m}$ (相对降低 67%),主动控制时的车体位移标准差为 $0.013\ 8\text{ m}$ (相对降低 71%)。可见上述最优控制能显著降低车辆系统的非线性随机振动,主动控制效果略好于半主动控制,因为半主动控制受到一定约束。

图4展示了半主动控制、主动控制与未控制时车体振动速度响应随时间的变化,同样地主动控制与半主动控制均能显著降低车辆系统的非线性随机振动速度,因此能有效控制车体振动能量。

图5展示了半主动控制、主动控制与未控制时车体振动位移响应标准差随观测噪声幅度系数 e_{11} 的变化,车体振动响应标准差随观测噪声幅度系数

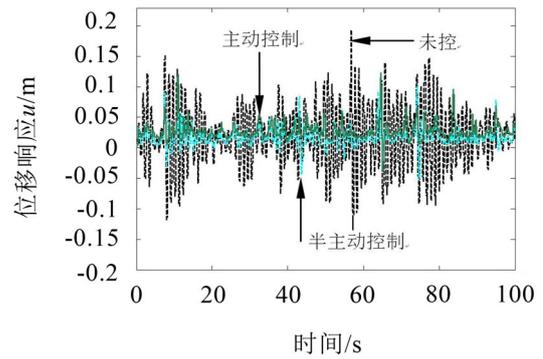


图3 车体振动位移响应

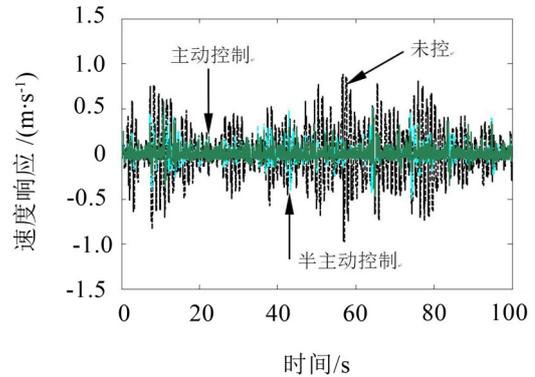


图4 车体振动速度响应

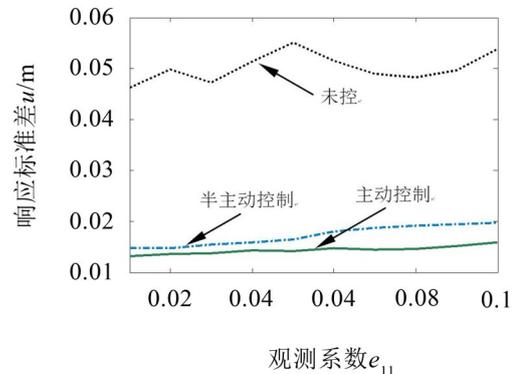


图5 车体振动位移响应标准差随观测噪声幅度系数 e_{11} 变化 e_{12} 变化的情况类似。可见在一定范围内,不同观测噪声幅度系数或噪声强度对于半主动控制与主动控制时车体振动响应标准差的影响较小。

图6展示了半主动控制、主动控制与未控制时车体振动位移响应标准差随观测响应放大系数 d_1 的变化,车体振动响应标准差随观测响应放大系数 d_2 变化的情况类似。在较大范围内,不同观测响应放大系数对于半主动控制与主动控制时车体振动响应标准差的影响较小。因此上述部分可观的最优控制对于不同观测系数具有一定的鲁棒性,改善控制器以减少控制约束可进一步提高控制效果。

总之,上述部分可观的最优主动与半主动有界

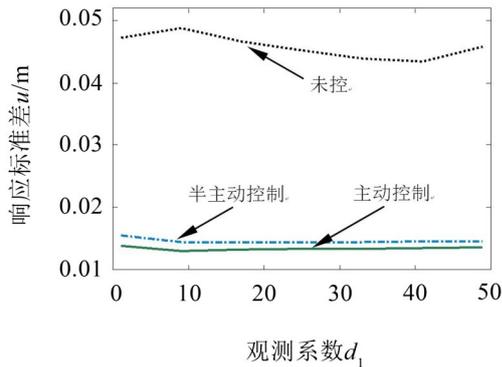


图6 车体振动位移响应标准差随观测响应放大系数 d_1 变化控制能显著降低斜杆支承车辆系统在随机路激励下的非线性随机振动,且该控制结果对于状态观测噪声强度与观测响应放大系数具有一定的鲁棒性。

4 结语

本文研究了具有观测噪声的斜杆支承车辆系统受随机路激励的非线性随机振动控制,发展了该部分可观车辆系统的非线性随机控制新策略。考虑车体与车轮的垂直耦合运动及斜支承杆的转动,建立了部分可观车辆控制系统模型的非线性随机振动方程与包含测量噪声的系统观测方程,建立了该部分可观车辆系统的非线性随机最优控制模型。根据推广的Kalman滤波方法得到了关于估计状态的非线性随机系统方程,从而将部分可观车辆系统的非线性随机最优控制问题转化为完全可观的非线性随机最优控制问题。根据随机动态规划原理建立了完全可观系统的动态规划方程,并结合控制力的有界性,得到了基于系统估计状态的最优有界控制律,实现了主动控制,同时对于磁流变阻尼器实现了相应的半主动控制。数值结果说明了该控制策略可有效地降低具有观测噪声的斜杆支承与控制车辆系统在随机路激励下的非线性随机振动,并对于不同观测系数具有一定的鲁棒性。

参考文献:

[1] TSENG H E, HROVAT D. State of the art survey: active and semi-active suspension control[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2015, 53: 1034-1062.
 [2] SHARP R S, PENG H. Vehicle dynamics applications of optimal control theory[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2011, 49: 1073-1111.

[3] HAC A. Suspension optimization of a 2-DOF vehicle model using a stochastic optimal control technique[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, 100: 343-357.
 [4] NARAYANAN S, SENTHIL S. Stochastic optimal active control of a 2-DOF quarter car model with non-linear passive suspension elements[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211: 495-506.
 [5] RAO L V V G, NARAYANAN S. Sky-hook control of nonlinear quarter car model traversing rough road matching performance of LQR control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 323: 515-529.
 [6] NGUYEN S D, NGUYEN Q H, CHOI S B. A hybrid clustering based fuzzy structure for vibration control - Part 2: an application to semi-active vehicle seat-suspension system[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 56-57: 288-301.
 [7] FICHERA G, LACAGNINA M, PETRONE F. Modelling of torsion beam rear suspension by using multibody method[J]. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12: 303-316.
 [8] BENSOUSSAN A. Stochastic control of partially observable systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
 [9] YING Z G, ZHU W Q. A stochastic optimal control strategy for partially observable nonlinear quasi-Hamiltonian systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 310: 184-196.
 [10] YING Z G, HU R C, HUAN R H. Optimal vibration control for structural quasi-Hamiltonian systems with noised observations[J]. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 2017, 22: 233-241.
 [11] YING Z G, ZHU W Q. Optimal bounded control for nonlinear stochastic smart structure systems based on extended Kalman filter[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90: 105-114.
 [12] SPENCER B F, DYKE S J, SAIN M K, et al. Phenomenological model of a magnetorheological damper [J]. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123: 230-238.
 [13] YING Z G, NI Y Q, KO J M. A bounded stochastic optimal semi-active control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 304: 948-956.
 [14] 张巍, 应璽中, 应祖光. 非线性系统随机振动响应限界极大极小控制[J]. *噪声与振动控制*, 2015, 35(5): 53-55.