

文章编号:1006-1355(2018)02-0204-04

# 基于 Udwadia-Kalaba 理论的隔振平台动力学研究

黄 康, 刘伟炜, 王卫荣, 朱凌坤, 葛新方

(合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009)

**摘 要:**针对微制造平台的隔振问题,基于 Udwadia-Kalaba 理论建立隔振平台的动力学模型,并研究其在人行激励下的动力学特性。针对固连结构和分散结构建立 Udwadia-Kalaba 动力学模型,通过 MATLAB 仿真分别得到固连结构和分散结构的各质点响应曲线。研究表明:基于 Udwadia-Kalaba 理论的动力学模型可以在不引入拉格朗日乘数的情况下求解;通过其固连结构与分散结构响应曲线的对比,可以得知其固连结构相对于分散结构模型更能达到明显的减振效果,而且该理论方法能较好地应用于微制造隔振平台振动问题求解。

**关键词:**振动与波;Udwadia-Kalaba 理论;人行激励;固连结构;分散结构

中图分类号:TH113.1

文献标志码:

DOI 编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2018.02.038

## Dynamics Research of Isolation Platforms based on Udwadia-Kalaba Theory

HUANG Kang, LIU Weiwei, WANG Weirong,  
ZHU Lingkun, GE Xinfang

(School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract :** Vibration isolation problem of the micro manufacturing platforms is studied. The dynamics models of the solid structure and the decentralized structure of the vibration isolation platform are established respectively based on Udwadia-Kalaba theory and their dynamic characteristics under pedestrian excitation are studied. The particle response curves of the two structures are obtained through MATLAB simulation. The result shows that the dynamic model based on the Udwadia-Kalaba theory can be solved without introducing Lagrange multipliers; the solid structure has more obvious damping effect than the decentralized structure. It is concluded that the proposed theoretical method can be effectively applied to the analysis of the dynamic problems of the micro manufacturing isolation platforms.

**Keywords :** vibration and wave; Udwadia-Kalaba theory; crowd excitation; solid structure; decentralized structure

近年来,随着微制造技术和精密测量技术的飞速发展,精密隔振系统已成为一个十分重要的研究课题。国内外许多学者已经对微制造隔振平台展开研究<sup>[1]</sup>。对于微制造隔振平台,在其生产制造过程中,实验室或工厂内的人员走动不可避免会产生微小振动,这个微小振动传递到微振动平台会对微制造的加工精度有一定影响,因此人行激励对微制

造平台的影响不能忽视<sup>[2]</sup>。在此基础上运用 Udwadia-Kalaba 方法<sup>[3-4]</sup>进行微制造隔振平台离散化动力学建模,将微制造隔振平台模型简化为简单运动模型,并且不需要考虑整个系统自由度之间的耦合,过程简单,不易出错;另一方面,在将系统约束转化为约束力的过程中不必考虑拉格朗日乘子,容易确定约束力。该方法在约束系统动力学建模上可广泛应用。最终求解得到固连结构各质点的位移响应曲线,与分散结构的各质点位移响应曲线对比,可以得到良好的减振效果。

## 1 微制造隔振平台结构

以长春光机所的光栅刻划机为例介绍微制造隔振平台的结构,光栅刻划机位于隔振平台上,其整体装置放置在一个较为密闭的实验室内,在一个深坑

收稿日期:2017-06-05

基金项目:国家973高技术研究发展计划资助项目  
(2014CB049500)

作者简介:刘伟炜(1993-),男,安徽省池州市人,硕士研究生,主要研究方向为隔振平台。

E-mail: 356165760@qq.com

通信作者:黄康,男,博士生导师。

E-mail: hfhuang98@163.com

中,为了保证光栅刻划机的加工精度,在深坑的四周布置镂空地板,用于隔绝实验室内的气流,隔振平台下面垫有砂石等一些减振材料,具体结构见图1。

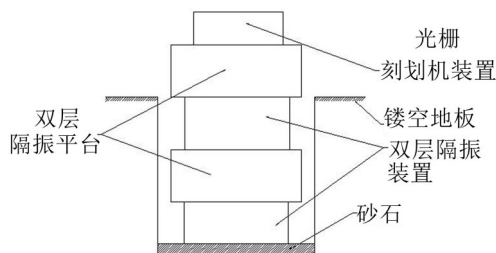
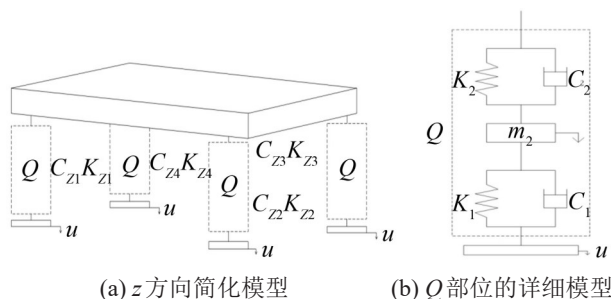


图1 光栅刻划机结构装置简图

在微振动隔振平台离散化的模型中,对于每个质点所建立的双层隔振系统的第2层质量块之间是相互独立的,这种结构称为分散结构,如图2所示。



(a) z方向简化模型

(b) Q部位的详细模型

图2 微制造隔振平台分散结构模型图

而另一种为固连结构,双层隔振机构中4个质点的第2层简化的质量块不是相互独立的,为了进一步减小振动的影响,使其相互固连在一起,即第2层的4质点位于一个平面上,如图3所示。

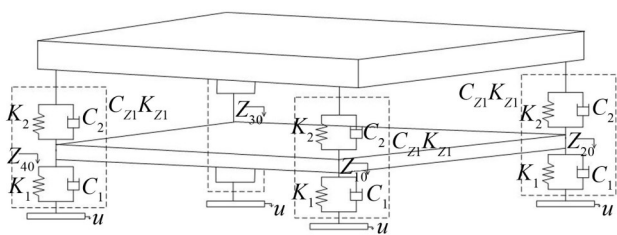


图3 微制造隔振平台固连结构模型图

这样在设计之初就可认定固连结构对环境振动的减振效果更加明显,而对于分散式结构,第2层等效质量块各自独立,对每个质点的振动会造成一定的副作用,导致在环境振动控制方面相互影响,造成振动加剧,进而对微制造设备的精度起破坏性的作用。

本文中平台的质量为 $m$ ,各边的边长为 $2l$ 。每个空气弹簧各个方向所具有的刚度和阻尼是相同的,分别为 $k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_z$ 和 $c_x$ 、 $c_y$ 、 $c_z$ 。

## 2 U-K动力学方程

无外力约束系统运动方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \quad (2)$$

有外力约束系统运动方程为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{q}$ 为 $n$ 维向量,表示系统的自由度; $t$ 为时间变量; $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ 为 $n \times n$ 维正定矩阵; $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为广义主动力矩阵; $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为 $m \times n$ 维矩阵, $m$ 为约束力的个数; $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为 $m$ 维矩阵

由式(1)、式(2)、式(3)式可得系统运动方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right)^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \quad (5)$$

式中: $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为无约束部分; $\mathbf{Q}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为约束部分。根据 Udwadia-Kalaba 理论,系统所受约束力为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}_c = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \left( \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right)^+ (\mathbf{B} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \quad (6)$$

## 3 隔振平台结构的简化

对于人员的走动问题主要考虑的是竖向荷载,竖向人行荷载是由单个人体重加上一个波动周期分量,而整个人群荷载是由单个人行荷载乘以一个放大系数,综上群荷载总的有效竖向力计算公式如下

$$F_w = \begin{cases} \sqrt{N} 0.36 \times 700 \sin(2\pi f_v t) \\ \sqrt{N} 0.13 \times 700 \sin(2\pi f_v t) \end{cases} \quad (7)$$

上式中: $N$ 为任意时刻实验室或工厂内的人员数, $f_v$ 为地板所具有的竖向固有频率。

结合图2所示,微制造隔振平台整体结构简化成在行人激励下的单质点的等效模型,将双层隔振模型与底座看作一个整体,简化的单自由度模型见图4。

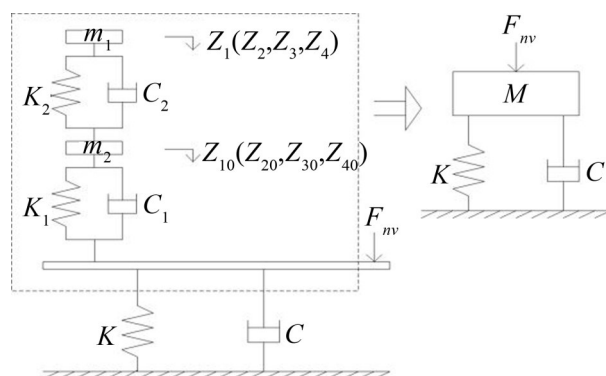


图4 单质点的等效模型

其中固连结构中 $m_2$ 连接在一起;分散结构 $m_2$ 分散布置。

$M$ 的位移响应曲线很容易得到;具体等效参数为 $N$ 为4; $M$ 为1 000 kg; $K$ 为200 N/mm; $C$ 为100 N·s/mm; $f_v$ 选为2.0 Hz;然后计算所得

$$u(t) = 0.0032 \sin(12.56t + 0.00798) \quad (8)$$

针对Z方向的振动,4个质点共有8个自由度,由4个质点的U-K动力学方程可得

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$q(t) = [\ddot{z}_1, \ddot{z}_{10}, \ddot{z}_2, \ddot{z}_{20}, \ddot{z}_3, \ddot{z}_{30}, \ddot{z}_4, \ddot{z}_{40}]^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} c_2(\dot{z}_{10} - \dot{z}_1) + k_2(z_{10} - z_1) \\ -c_1\dot{z}_{10} - k_1z_{10} + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_{10}) + k_2(z_1 - z_{10}) + c_1\dot{u} + k_1u \\ c_2(\dot{z}_{20} - \dot{z}_2) + k_2(z_{20} - z_2) \\ -c_1\dot{z}_{20} - k_1z_{20} + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_{20}) + k_2(z_2 - z_{20}) + c_1\dot{u} + k_1u \\ c_2(\dot{z}_{30} - \dot{z}_3) + k_2(z_{30} - z_3) \\ -c_1\dot{z}_{30} - k_1z_{30} + c_2(\dot{z}_3 - \dot{z}_{30}) + k_2(z_3 - z_{30}) + c_1\dot{u} + k_1u \\ c_2(\dot{z}_{40} - \dot{z}_4) + k_2(z_{40} - z_4) \\ -c_1\dot{z}_{40} - k_1z_{40} + c_2(\dot{z}_4 - \dot{z}_{40}) + k_2(z_4 - z_{40}) + c_1\dot{u} + k_1u \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 4 仿真

设置具体的仿真参数,并将参数代入到MATLAB软件中进行仿真。

表1 仿真数据

仿真参数	数值
上质量块 $m_1$ /kg	300
下质量块 $m_2$ /kg	200
上弹簧刚度 $k_2$ /N/mm	300
下弹簧刚度 $k_1$ /N/mm	200
上阻尼 $c_2$ 和下阻尼 $c_1$ /N·s/mm	100

具体的约束为:  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 、 $z_4$  4个自由度位于一个平面上,而且其  $z_{10}$ 、 $z_{20}$ 、 $z_{30}$ 、 $z_{40}$  4个自由度也同样位于一个平面上,最终确定其离散化模型的z方向8个自由度的具体的约束形式是

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \\ z_{10} + z_{30} = z_{20} + z_{40} \end{cases} \quad (10)$$

上式对时间求2阶导数,可以得到2阶约束形式为

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \ddot{z}_3 = \ddot{z}_2 + \ddot{z}_4 \\ \ddot{z}_{10} + \ddot{z}_{30} = \ddot{z}_{20} + \ddot{z}_{40} \end{cases} \quad (11)$$

将以上两式代入有外力约束系统运动方程式(3)中

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t)$$

$$\text{可得: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{q} = [\ddot{z}_1, \ddot{z}_{10}, \ddot{z}_2, \ddot{z}_{20}, \ddot{z}_3, \ddot{z}_{30}, \ddot{z}_4, \ddot{z}_{40}]^T$$

$$b = 0$$

其中微振动隔振平台各自由度的初始条件具体如下

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0 \\ z_{10} = 0 \\ z_{20} = 0 \\ z_{30} = 0 \\ z_{40} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0 \\ \dot{z}_{10} = 0 \\ \dot{z}_{20} = 0 \\ \dot{z}_{30} = 0 \\ \dot{z}_{40} = 0 \end{cases}$$

根据U-K动力学方程,可得到8个自由度的位移响应曲线,其分别是  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 、 $z_4$ 、 $z_{10}$ 、 $z_{20}$ 、 $z_{30}$ 、 $z_{40}$ 。下图为固连结构和分散结构的位移响应曲线的对比图,从对比图上可以看出固连结构能起到良好的减振作用。

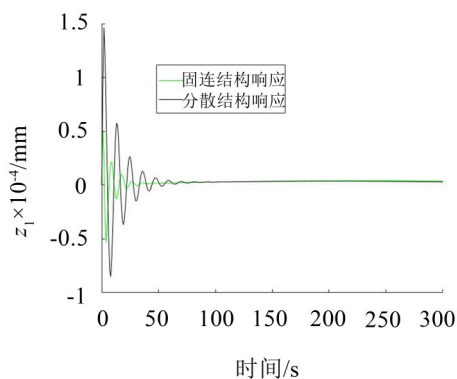


图5  $z_1$  的位移响应曲线

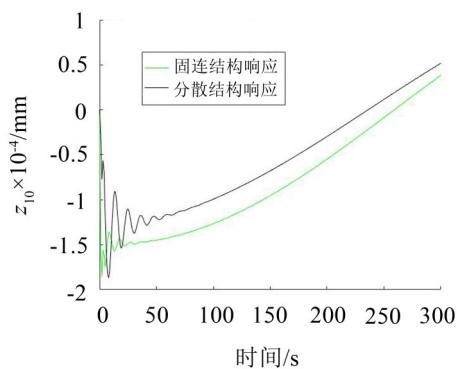
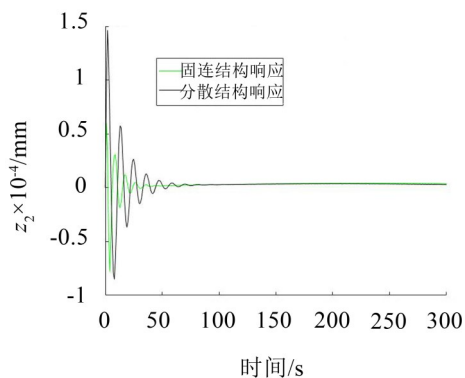
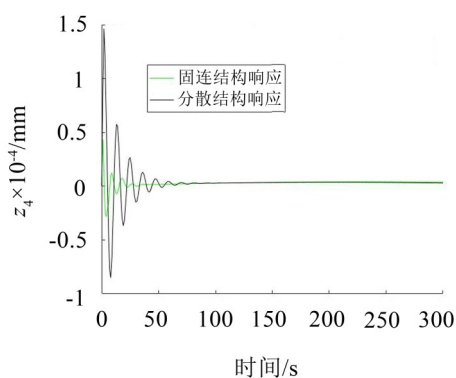
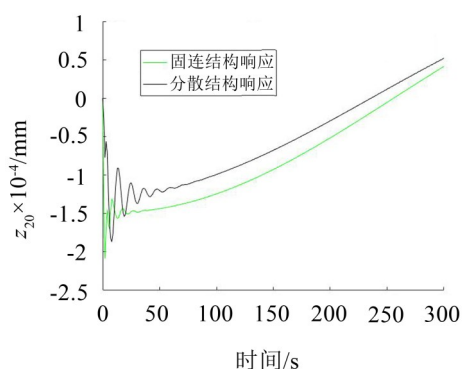
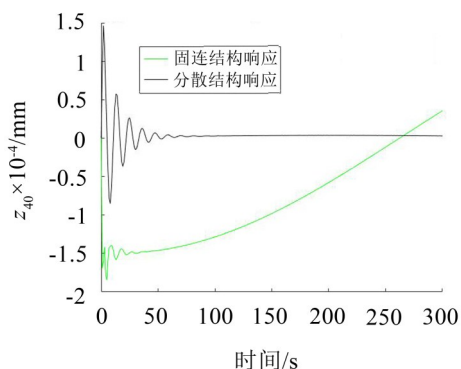
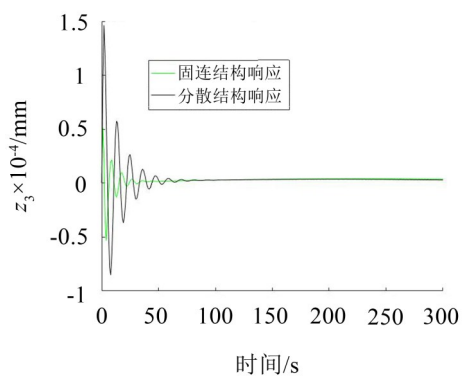
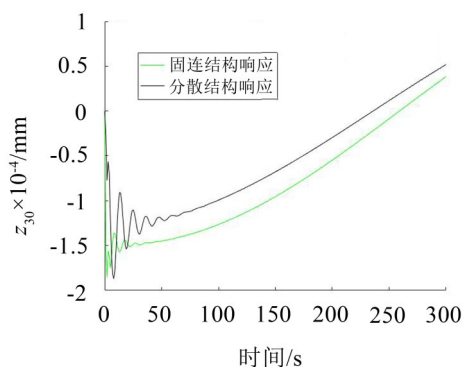


图6  $z_{10}$  的位移响应曲线

## 5 结语

(1) 从图5、图7、图9、图11对比中可以看出固连结构与分散结构相比,固连结构能达到良好的减振效果;但是从图6、图8、图10中可以看出,其位移响应曲线相比原来的自由振动响应曲线有所下降;而图12由于约束变化较大,所以其振动响应曲线变化比较大;

图7  $z_2$  的位移响应曲线图11  $z_4$  的位移响应曲线图8  $z_{20}$  的位移响应曲线图12  $z_{40}$  的位移响应曲线图9  $z_3$  的位移响应曲线图10  $z_{30}$  的位移响应曲线

(2) 由于微制造隔振平台最终的振动响应反映在  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 、 $z_4$  4个自由度上面,从这4个自由度的对比图上,可以清楚地看出,人群激励所带来的振动被固连结构的第2层结构所吸收,从而起到了减振作用;而分散结构中的各个质点由于其第2层分散结构相互之间无约束,故起不到吸振作用;所以固连结构相比分散结构可以达到更好的减振效果。

#### 参考文献:

- [1] 涂奉臣,陈照波,李华,等. 新型整星隔振平台的被动隔振性能及星箭耦合特性分析[J]. **航空学报**, 2010, 31(3): 538-545.
- [2] 孙利民,闫兴非. 人行桥人行激励振动及设计方法[J]. **同济大学学报(自然科学版)**, 2004, 32(8): 996-999.
- [3] 黄康,孙顺强,葛新方,等. 采用Udwadia-Kalaba理论的微振动隔振平台研究[J]. **西安交通大学学报**, 2017, 51(1): 1-58.
- [4] UDWADIA F. On constrained motion[J]. **Applied Mathematics & Computation**, 2005, 51(2): 313-320.