文章编号：1006-1355(2018)02-0018-04+49

用动态刚度法分析旋转变截面梁横向振动特性

韩 伟， 毛崎波

（南昌航空大学 飞行器工程学院，南昌 330063）

摘 要：通过引入动态刚度法分析旋转变截面梁的振动特性。首先基于欧拉-伯努利梁理论给出旋转变截面梁自由振动方程，然后通过动态刚度法推导该旋转梁的动态刚度矩阵，最后运用MATLAB中的fzero函数求解特征值方程得到旋转梁横向振动的固有频率和模态振型。数值计算结果证明了动态刚度法的精度和有效性，同时分析了轮毂半径、转速以及渐变系数对固有频率的影响。

关键词：振动与波；旋转变截面梁；欧拉-伯努利梁；固有频率；弯曲振动

中图分类号：O32；O321 **文献标志码：**A **DOI编码：**10.3969/j.issn.1006-1355.2018.02.004

Analysis of Free Vibration of Rotating Tapered Beams using Dynamic Stiffness Method

HAN Wei, *MAO Qibo*

(School of Aircraft Engineering, Nanchang HangKong University, Nanchang 330063, China)

Abstract : The dynamic stiffness method is employed to analyse the vibration problem for rotating tapered beams. Based on Euler-Bernoulli beam theory, the governing equation of free vibration of a rotating tapered beam is derived. Then the dynamic stiffness matrix is developed by using the dynamic stiffness method. Finally, the natural frequencies and corresponding mode shapes of the beam are obtained by using fzero function of MATLAB. The accuracy and effectiveness of the proposed method are verified by numerical calculations. Furthermore, the influences of the hub radius, rotating speed and taper ratio on the natural frequency are discussed in detail.

Keywords : vibration and wave; rotating tapered beams; Euler-Bernoulli beam; natural frequency; bending vibration

旋转梁被广泛用于直升机旋翼、风力机叶片、螺旋桨以及各种旋转机械结构，而研究旋转梁的振动特性是设计此类机械的重要基础。国内外许多学者对该类问题做过研究。褚德超[1]使用高阶有限元分析了等截面旋转梁的固有振动。Hashemi 和 Richard[2]研究了科氏力对等截面旋转梁固有频率的影响。Yoo等[3]分析了集中质量对等截面旋转梁模态特性的影响。李艳辉[4]针对等截面旋转梁的弯曲振动问题提出了一种高精度的有限元——梁柱元，Chung等[5]利用有限元法计算了等截面旋转梁的动力响应。而对变截面旋转梁的计算，一般采用有限元法[6]，把梁分成若干个单元，每个单元近似看成等截面梁单元，这样需要较多的单元才能取得满意的精度。另外还有微分求积法[7]、有限差分法[8-9]和假设模态法[10]

动态刚度法[11-12]是解决工程结构振动问题的一种有效方法，它简单灵活，易于编程运算，适用于梁的各种边界条件，适合处理沿几何轴线发生改变的变参数，如变截面、旋转梁离心力等。本文采用动态刚度法求解旋转变截面梁的振动特性，首先基于欧拉-伯努利梁理论建立自由振动方程，然后利用动态刚度法推导出动态刚度矩阵，最后运用MATLAB中的fzero函数求解特征方程得到旋转梁横向振动的固有频率和振型，数值计算结果表明该方法对于求解变截面旋转梁自由振动是有效的，且具有较高的精度。

1 旋转梁模型

旋转梁模型如图1所示，该模型是欧拉-伯努利梁，仅考虑平面弯曲振动，不考虑剪切变形和转动惯量的影响，轮毂为刚性。

收稿日期：2017-04-18

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11464031,51265037)；航空科学基金资助项目(2015ZA56002)

作者简介：韩伟(1992－)，男，合肥市人，硕士生，主要研究方向为结构振动及噪声控制。

通信作者：毛崎波，男，硕士生导师。
E-mail: qibo_mao@yahoo.com

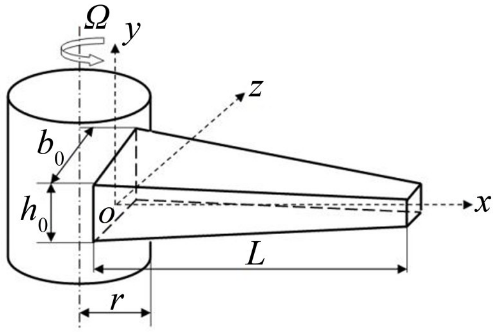

图 1 变截面旋转梁模型

以梁左端截面形心为原点建立空间直角坐标系，x 轴为梁轴线，r 为旋转梁的轮毂半径，悬臂梁绕轮毂中心的垂直轴旋转。梁的旋转角速度为 Ω，长度为 L。梁截面为矩形，其高度 $h(x)$ 和宽度 $b(x)$ 沿 x 轴方向减小，可以表示为

$$h(x)=h_0\left(1-c_h\frac{x}{L}\right) \tag{1}$$

$$b(x)=b_0\left(1-c_b\frac{x}{L}\right) \tag{2}$$

式中：h_0 和 b_0 分别为梁固定端截面的高度和宽度。c_h 和 c_b 分别是高度和宽度的渐变系数。

2 动态刚度法

基于欧拉-伯努利梁理论，变截面旋转梁的横向自由振动微分方程为[4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial \mathrm{w}(x,t)}{\partial x}\right]=0 \tag{3}$$

式中：$w(x,t)$ 为梁的横向挠度函数，E 和 ρ 分别为梁的弹性模量和密度，$A(x)$ 和 $I(x)$ 分别是横截面积和惯性矩，可表示为

$$A(x)=b(x)h(x)=A_0\left(1-c_b\frac{x}{L}-c_h\frac{x}{L}+c_bc_h\frac{x^2}{L^2}\right) \tag{4}$$

$$I(x)=\frac{b(x)h^3(x)}{12}=I_0\left(1-c_b\frac{x}{L}\right)\left(1-c_h\frac{x}{L}\right)^3= I_0\left(1+\alpha_1\frac{x}{L}+\alpha_2\frac{x^2}{L^2}+\alpha_3\frac{x^3}{L^3}+\alpha_4\frac{x^4}{L^4}\right) \tag{5}$$

式中：

$$A_0=b_0h_0, I_0=\frac{b_0h_0^{\ 3}}{12}, \alpha_1=-(c_b+3c_h), \alpha_2=3c_h(c_b+c_h),$$
$$\alpha_3=-c_h^{\ 2}(3c_b+c_h), \alpha_4=c_bc_h^{\ 3}$$

$T(x)$ 是旋转梁所受离心力，可表示为

$$T(x)=\int_x^L\left[\rho A(x)\Omega^2(r+x)\right]\mathrm{d}x \tag{6}$$

使用分离变量法，式(3)的通解具有如下形式

$$w(x,t)=\varphi(x)e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{7}$$

式中：$i=\sqrt{-1}$，$\varphi(x)$ 和 ω 分别为振型函数和角频率。

将式(7)代入式(3)，并分离变量 t 和 x，可得4阶变系数常微分方程，对此方程进行无量纲化处理可得

$$\begin{aligned}&\left(1+\alpha_1X+\alpha_2X^2+\alpha_3X^3+\alpha_4X^4\right)\frac{\mathrm{d}^4\Phi(X)}{\mathrm{d}X^4}+\\&2\left(\alpha_1+2\alpha_2X+3\alpha_3X^2+4\alpha_4X^3\right)\frac{\mathrm{d}^3\Phi(X)}{\mathrm{d}X^3}+\\&\left(2\alpha_2+6\alpha_3X+12\alpha_4X^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\Phi(X)}{\mathrm{d}X^2}-\\&U^2\left(\beta_0+\beta_1X+\beta_2X^2+\beta_3X^3+\beta_4X^4\right)\frac{\mathrm{d}^2\Phi(X)}{\mathrm{d}X^2}\\&-U^2\left(\beta_1+2\beta_2X+3\beta_3X^2+4\beta_4X^3\right)\frac{\mathrm{d}\Phi(X)}{\mathrm{d}X}-\\&\lambda^2\left(1-c_bX-c_hX+c_bc_hX^2\right)\Phi(X)=0\end{aligned} \tag{8}$$

式中：

$$X=\frac{x}{L}, R=\frac{r}{L}, U=\sqrt{\frac{\rho A_0\Omega^2L^4}{EI_0}}, \Phi(X)=\frac{\varphi(x)}{L}, \lambda=\sqrt{\frac{\rho A_0\omega^2L^4}{EI_0}},$$

$$\beta_0=\frac{1}{12}\left[12R+3c_bc_h-4\left(c_b+c_h-c_bc_hR\right)+6\left(1-c_bR-c_hR\right)\right],$$

$$\beta_1=-R, \beta_2=\frac{1}{2}\left(c_bR+c_hR-1\right), \beta_3=\frac{1}{3}\left(c_b+c_h-c_bc_hR\right),$$

$$\beta_4=-\frac{c_bc_h}{4}$$

同理，对离心力 $T(x)$ 进行无量纲化处理得到

$$\bar{T}(X)=\frac{T(x)L^2}{EI_0}=U^2\left(\beta_0+\beta_1X+\beta_2X^2+\beta_3X^3+\beta_4X^4\right) \tag{9}$$

采用Frobenius法[13]求解式（8），其解可表示为如下的级数形式

$$\Phi(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}X^{n+c} \tag{10}$$

式中：a_{n+1} 为多项式函数的系数，c 为待定指数，将式(10)代入式(8)，可得如下指数方程

$$c(c-1)(c-2)(c-3)=0 \tag{11}$$

同时可得下列递推关系式

$$a_1(c)=1$$

$$a_2(c)=-\frac{c-1}{c+1}\alpha_1$$

$$a_3(c)=-\frac{\alpha_1c}{c+2}a_2(c)-\frac{\alpha_2c(c-1)-U^2\beta_0}{(c+2)(c+1)}a_1(c)$$

$$\begin{aligned}a_4(c)=&-\frac{\alpha_1(c+1)}{c+3}a_3(c)-\frac{\alpha_2(c+1)c}{(c+3)(c+2)}a_2(c)+\\&\frac{U^2\beta_0}{(c+3)(c+2)}a_2(c)-\frac{\alpha_3(c-1)c}{(c+3)(c+2)}a_1(c)+\\&\frac{U^2\beta_1c}{(c+3)(c+2)(c+1)}a_1(c)\end{aligned}$$

$$a_5(c)=-\frac{\alpha_1(c+2)}{c+4}a_4(c)-\frac{\alpha_2(c+2)(c+1)}{(c+4)(c+3)}a_3(c)+\frac{U^2\beta_0}{(c+4)(c+3)}a_3(c)-\frac{\alpha_3(c+1)c}{(c+4)(c+3)}a_2(c)+\frac{U^2\beta_1(c+1)}{(c+4)(c+3)(c+2)}a_2(c)-\frac{\alpha_4 c(c-1)}{(c+4)(c+3)}a_1(c)+\frac{U^2\beta_2 c(c+1)+\lambda^2}{(c+4)(c+3)(c+2)(c+1)}a_1(c)$$

$$a_6(c)=-\frac{\alpha_1(c+3)}{c+5}a_5(c)-\frac{\alpha_2(c+3)(c+2)}{(c+5)(c+4)}a_4(c)+\frac{U^2\beta_0}{(c+5)(c+4)}a_4(c)-\frac{\alpha_3(c+2)(c+1)}{(c+5)(c+4)}a_3(c)+\frac{U^2\beta_1(c+2)}{(c+5)(c+4)(c+3)}a_3(c)-\frac{\alpha_4(c+1)c}{(c+5)(c+4)}a_2(c)+\frac{U^2\beta_2(c+1)(c+2)+\lambda^2}{(c+5)(c+4)(c+3)(c+2)}a_2(c)+\frac{U^2\beta_3 c(c+2)-\lambda^2(c_b+c_h)}{(c+5)(c+4)(c+3)(c+2)}a_1(c)$$

$$a_{n+7}(c)=-\frac{\alpha_1(n+c+4)}{n+c+6}a_{n+6}(c)-\frac{\alpha_2[(n+c+2)(n+c+5)+2]}{(n+c+6)(n+c+5)}a_{n+5}(c)+\frac{U^2\beta_0}{(n+c+6)(n+c+5)}a_{n+5}(c)-\frac{\alpha_3(n+c+2)[(n+c+1)(n+c+6)+6]}{(n+c+6)(n+c+5)(n+c+4)}a_{n+4}(c)+\frac{U^2\beta_1(n+c+3)}{(n+c+6)(n+c+5)(n+c+4)}a_{n+4}(c)-\frac{\alpha_4(n+c+2)(n+c+1)[(n+c)(n+c+7)+12]}{(n+c+6)(n+c+5)(n+c+4)(n+c+3)}a_{n+3}(c)+\frac{U^2\beta_3(n+c+1)(n+c+3)-\lambda^2(c_b+c_h)}{(n+c+6)(n+c+5)(n+c+4)(n+c+3)}a_{n+2}(c)+\frac{\lambda^2 c_b c_h+U^2\beta_4(n+c)(n+c+3)}{(n+c+6)(n+c+5)(n+c+4)(n+c+3)}a_{n+1}(c)$$

$$n=0,1,2,3,\ldots,\infty \tag{12}$$

显然，式(11)的根为 $c_i=0,1,2,3,(i=1,2,3,4)$。因此，可得4个线性独立多项式解函数如下

$$F_i(X)=\sum_{n=0}^{M}a_{n+1}(c_i)X^{n+c_i},i=1,2,3,4 \tag{13}$$

根据上述分析可知，式(8)的解可表示为

$$\Phi(X)=N_1F_1(X)+N_2F_2(X)+N_3F_3(X)+N_4F_4(X) \tag{14}$$

注意到式(13)包含4个待定系数 N_i，i=1,2,3,4,可通过边界条件确定。

现考虑如图1所示旋转梁的边界条件。

固定端 $(X=0)$：

$$\Phi(0)=0,\ \Phi'(0)=0;\ \bar{V}(0)=-\bar{V}_1,\ \bar{M}(0)=-\bar{M}_1 \tag{15}$$

自由端 $(X=1)$：

$$\Phi(1)=\Phi_2,\ \Phi'(1)=\Phi'_2;\ \bar{V}(1)=0,\ \bar{M}(1)=0 \tag{16}$$

式中：$\bar{V}$、$\bar{M}$ 分别为所受剪力和弯矩。

令 $Q=\left[\bar{V}_1,\bar{M}_1,0,0\right]^{\mathrm{T}}$，$q=\left[0,0,\Phi_2,\Phi'_2\right]^{\mathrm{T}}$，

$$N=\left[N_1,N_2,N_3,N_4\right]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

将式(15)、式(16)写成矩阵形式可得

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{P}N=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\F'_1(0)&1&0&0\\F_1(1)&F_2(1)&F_3(1)&F_4(1)\\F'_1(1)&F'_2(1)&F'_3(1)&F'_4(1)\end{bmatrix}N \tag{18}$$

以及

$$Q=[\boldsymbol{B}]_{4\times4}N \tag{19}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为一 4×4 矩阵，其元素可表示为

$$\begin{gathered}B_{1i}=F'''_i(0)+\alpha_1F''_i(0)-\bar{T}(0)F'_i(0)\\B_{2i}=-F''_i(0)\\B_{3i}=-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)F'''_i(1)-\\(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4)F''_i(1)+\bar{T}(1)F'_i(1)\\B_{4i}=(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)F''_i(1)\end{gathered} \tag{20}$$

现联立式(18)、式(19)可得

$$Q=\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{21}$$

式中：$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ 即为所求旋转梁的动态刚度矩阵。

式(21)通过消去固定端和自由端中为零的边界条件可进一步化为

$$\begin{bmatrix}k_{13}&k_{14}&-1&0\\k_{23}&k_{24}&0&-1\\k_{33}&k_{34}&0&0\\k_{43}&k_{44}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_2\\\Phi'_2\\\bar{V}_1\\\bar{M}_1\end{bmatrix}=0 \tag{22}$$

为使式(22)有非零解，其系数矩阵行列式必为零，得到变截面旋转梁的特征值方程

$$\begin{vmatrix}k_{33}&k_{34}\\k_{43}&k_{44}\end{vmatrix}=0 \tag{23}$$

特征方程式(23)是无量纲固有频率 λ 的非线性方程，可以采用MATLAB中fzero函数求解，得到横向振动的固有频率 λ；将 λ 代入式(14)、式(18)、式(19)可得梁模态函数。

3 数值算例

为了探讨上述动态刚度法所求的半解析解的收敛特性，先以一种变截面梁为算例，其转速 U=12，轮毂半径 R=0，宽度渐变系数 c_b=0，高度渐变系数 c_h=0.5。表1给出了每一个级数项数 M 对应的前4阶固有频率值，并与文献[14]进行比对。

从表1可以发现，阶数越高，需要将M值取得越大，对于高阶频率需要非常多项才能逼近精确解，这

将导致计算上的困难，而通常模态分析只做到前6阶即可满足一般的工程应用。当M取90时，前4阶固有频率值可得到小数点后四位的精度。为了保证计算结果的精度，在随后的算例中，统一取M=100。

为了进一步验证上述方法的有效性，这里选取两组算例对此进行验证，分别为U=5，c_b=0.3，c_h=0.5以及R=1，c_b=0.6，c_h=0.2，并将该数值结果和文献[14]结果（黑体部分）进行了比对，如表2和表3所示。从表2及表3可以看出，动态刚度法结果与文献[14]的结果高度吻合，说明当M=100时所求出的固有频率值精度较高，可以满足一般的工程应用要求。观察表2和3可以发现，随着轮毂半径R或者转速U的增加，各阶固有频率值也随之增加。这是因为随着轮毂半径和转速的增加，向心惯性力随之增加从而导致梁的刚化效应增强。

表1　级数项数M及其所对应的的前4阶频率值

M	Mode index n			
	1	2	3	4
41	2.807 1	62.699 7	134.509 6	226.499 1
50	13.935 7	33.409 2	63.561 1	114.881 2
60	13.465 0	34.091 4	65.583 5	110.334 2
70	13.471 2	34.087 8	65.522 9	110.220 0
80	13.471 1	34.087 7	65.523 7	110.225 1
90	13.471 1	34.087 7	65.523 7	110.225 0
100	13.471 1	34.087 7	65.523 7	110.225 0
	13.471 1	**34.087 7**	**65.523 7**	**110.225 0**

注：表1中黑体部分为文献[14]的结果

表2　前5阶频率(U=5，c_b=0.3，c_h=0.5)

R	Mode index n				
	1	2	3	4	5
0	7.0139 8	22.261 1	51.290 9	94.554 4	152.155 4
0.5	8.3715 6	24.207 9	53.476 5	96.885 8	154.574 2
1	9.5320 1	26.003 9	55.568 4	99.156 1	156.951 6
	9.532 0	**26.003 9**	**55.568 4**	**99.156 1**	**156.951 6**
2	11.496 1	29.253 9	59.511 7	103.529	161.589 0

注：表2中黑体部分为文献[14]的结果

表3　前5阶频率(R=1，c_b=0.6，c_h=0.2)

U	Mode index n				
	1	2	3	4	5
0	4.678 16	22.477 4	58.146 6	111.345 0	182.230 57
1	4.983 52	22.755 2	58.422 6	111.626 9	182.517 10
2	5.800 94	23.568 8	59.242 0	112.468 1	183.373 73
5	9.709 85	28.614 9	64.665 2	118.170 5	189.249 92
	9.709 85	**28.614 9**	**64.665 2**	**118.170 5**	**189.249 92**

注：表3中黑体部分为文献[14]的结果

图2给出了表3中c_b=0.6，c_h=0.2，R=1，U=1、2、5时3种工况下的前4阶模态振型图。从图2可以看出随着模态阶数的增加，不同转速所对应的模态振型之间的差别越来越小。

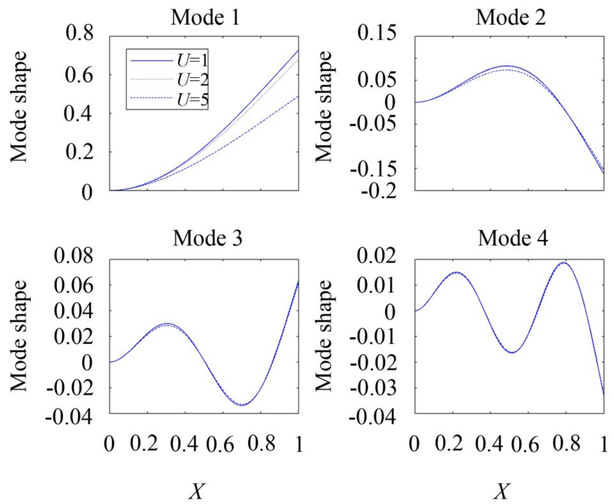

图2　c_b=0.6，c_h=0.2，R=1，U=1、2、5时前4阶模态振型图

图3给出了转速U=5，轮毂半径R=1时前3阶固有频率分别随宽度和高度渐变系数的变化图，左图中高度渐变系数c_h=0.5，右图中宽度渐变系数c_b=0.5。

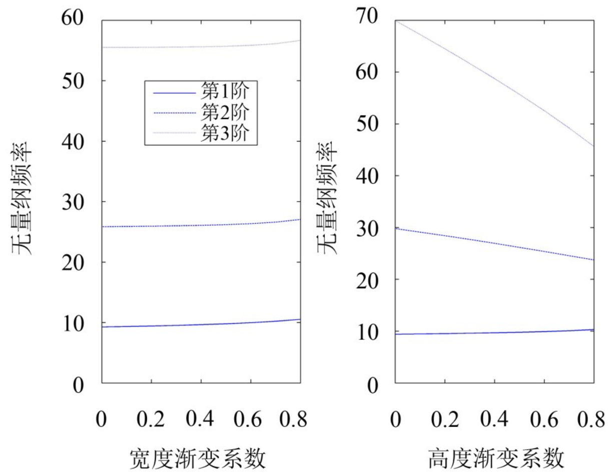

图3　固有频率分别随宽度和高度渐变系数的变化图

从左图可以看出，当高度渐变系数一定时，前3阶固有频率均随宽度渐变系数的增大而增大，从右图可以看出，当宽度渐变系数一定时，第1阶固有频率随高度渐变系数的增大而增大，而第2阶和第3阶固有频率均随高度渐变系数的增大而减小。

4　结　语

本文基于欧拉-伯努利梁理论建立任意变截面旋转梁横向振动方程，引入了计算任意变截面梁横向振动固有频率和模态振型的动态刚度法，数值算

（下转第49页）