文章编号：1006-1355(2018)02-0127-06

桩顶固定且部分桩体埋入黏弹性地基中时桩的自振特性分析

柳 伟[1]，余云燕[1,2]

（1. 兰州交通大学 土木工程学院，兰州 730070；
2. 兰州交通大学 甘肃省轨道交通力学应用工程实验室，兰州 730070）

摘 要：将回传射线矩阵法推广至桩土系统的振动分析中，采用基于Timoshenko梁理论的Winkler地基模型，运用回传射线矩阵法及求根法求解桩顶固定且部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振特性，并与基于有限元分析软件SAP2000的计算结果比较，验证利用回传射线矩阵法求解埋置结构自振特性的有效性和计算精度。同时，分析桩顶固定且部分桩体埋入黏弹性地基中时土体弹簧系数及土体阻尼系数对桩基自振频率和振型的影响。结果表明：随着土体弹簧系数的增大，埋置结构的各阶自振频率增大，土体弹簧系数对衰减系数没有影响，对埋置结构振型的影响较小；随着土体阻尼系数的减小，埋置结构的各阶自振频率增大，衰减系数相应减小，土体阻尼系数对埋置结构的低阶振型影响尤为明显，对高阶振型的影响较小。

关键词：振动与波；回传射线矩阵法；黏弹性；桩基；自振频率；衰减系数

中图分类号：O321；O241.82 **文献标志码**：A **DOI编码**：10.3969/j.issn.1006-1355.2018.02.025

Analysis of Vibration Characteristics of Piles with Top Fixed and Part Embedded in a Viscoelastic Foundation

LIU Wei[1], *YU Yunyan*[1,2]

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;
2. Gansu Province Engineering Laboratory of Rail Transit Mechanics Application,
Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract : The reverberation-ray matrix method is extending to the vibration analysis of pile- foundation systems. Based on the Winkler foundation model and Timoshenko beam theory, the vibration characteristics of the pile with top fixed and part embedded in an elastic foundation are solved by the reverberation-ray matrix method and the root method. The calculation result is compared with that of SAP2000 software. The effectiveness and accuracy of this method is verified. Meanwhile, the influences of soil spring coefficient and soil damping coefficient of the foundation on the natural frequencies and modals of the pile foundation are analyzed. The results show that the natural frequency of the embedded structure increases with the soil spring coefficient increasing; the soil spring coefficient has little effect on the attenuation coefficient and has small influence on the modals of the embedded structure; when the soil damping coefficient decreases, the natural frequency of the embedded structure increases and the attenuation coefficient of the embedded structure decreases correspondingly; the soil damping coefficient has an obvious influence on low-order modals and a small influence on high-order modals.

Keywords : vibration and wave; reverberation-ray matrix method; viscoelasticity; pile foundation; natural frequencies; attenuation coefficient

收稿日期：2017-07-28

基金项目：甘肃省基础研究创新群体资助项目（145RJIA332）；兰州交通大学优秀平台支持项目（201606）；国家自然科学基金资助项目（51268031）

作者简介：柳伟（1990－），男，甘肃省白银市人，硕士研究生，主要研究方向为岩土与地下结构工程。
E-mail:liuwei_815621@163.com

通信作者：余云燕（1968－），女，浙江省江山市人，博士，教授，博士生导师，研究方向为岩土与地下结构工程。
E-mail: yuyunyan@mail.lzjtu.cn

桩基作为一种强度高、承载力大、稳定性好、能适应各种复杂地质条件的深基础形式，广泛应用于高层建筑、铁路、桥梁、公路、港口码头等。其振动特性一直是科学以及工程应用中广受关注的问题[1-3]。

张海顺基于ANSYS分析了高架桥-地铁站-桩-土相互作用复杂结构体系的自振特性，桩土相互作用用黏弹性边界单元模拟，需要考虑较多因素以至于过分理想化造成模型模拟失真[4]。周勇军利用能

量法推导了高墩连续刚构桥纵向振动基频的计算公式，结果较准确，但过多依赖规范，对于高阶自振频率的计算局限性更大[5]。Morfidis研究了三参数弹性地基上Timoshenko梁的振动特性，但并未考虑实际工程中阻尼的影响[6]。彭丽等采用复模态方法求解了黏弹性三参数地基梁的横向自振特性，得到的频率方程以超越方程形式表达，在特征值分析时，需花费更多的时间，且没有分析衰减系数对自振特性的影响[7-8]。而波动理论为解决上述问题提供了一条有效的途径。回传射线矩阵法（Method of Reverberation-Ray Matrix，简称MRRM）由Pao等于1998年提出，用于分析在冲击荷载作用下框架结构的瞬态波动响应，并通过实验得到了有效的验证[9]。截止目前，回传射线矩阵法已成功应用于空间杆系结构的振动分析中，这种方法具有明显的高精度和低耗时，然而针对埋置结构的自振特性研究工作还很少[10-12]。

本文将回传射线矩阵法推广至桩土系统的振动分析中，运用回传射线矩阵法及求根法，求解桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振特性，并与有限元分析软件SAP2000的计算结果比较，同时，分析了桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时土体弹簧系数及土体阻尼系数对桩基自振频率和振型的影响。

1 问题的提出与求解

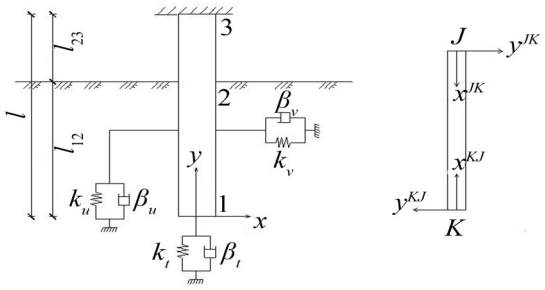
桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时桩-土的计算模型如图1（a）所示，在推导过程中作出如下假定

（1）桩土相互接触紧密，且土体变形已经稳定。

（2）桩基为有限长的弹性材料，其轴向位移为 $u(x,t)$，挠度为 $v(x,t)=v_b(x,t)+v_s(x,t)$，其中 $v_b(x,t)$ 是由弯矩引起的挠度，$v_s(x,t)$ 是由剪力引起的挠度；桩基总长、埋置长度、外露长度分别为 l、l_{12}、l_{23}；弹性模量、剪切模量、密度、横截面面积、截面剪切系数、横截面惯性矩分别为 E、G、ρ、A、k'、I_z。

（3）基于Timoshenko梁理论的Winkler地基模型，桩侧土对桩的纵向作用简化为并联的线性弹簧 k_u 和线性黏滞阻尼器 β_u 耦合；桩侧土对桩的横向作用简化为并联的线性弹簧 k_v 和线性黏滞阻尼器 β_v 耦合；桩底土对桩的竖向作用简化为并联的线性弹簧 k_t 和线性黏滞阻尼器 β_t 耦合。

建立整体坐标系，将单桩基础划分为2个单元3个节点，节点的编号如图1（a），对单桩基础的每个单元 JK 引入2个局部右手坐标系 $(x,y)^{KJ}$ 和 $(x,y)^{JK}$，原点分别在节点 J 和节点 K，如图1（b）所示。



(a) 桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基时桩-土的计算模型　(b) 局部坐标系

图1 桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基时桩-土的计算模型及局部坐标系

在局部坐标系下，12、23单元中纵波、挠曲波方程可统一写为

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k_{u_j}u+\beta_{u_j}\frac{\partial u}{\partial t}+\rho A\frac{\partial u^2}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\begin{cases}\rho I_z\dfrac{\partial^3 v_b}{\partial x\partial t^2}=EI_z\dfrac{\partial^3 v_b}{\partial x^3}+k'AG\dfrac{\partial v_s}{\partial x}\\ \rho A\dfrac{\partial^2(v_b+v_s)}{\partial t^2}=k'AG\dfrac{\partial^2 v_s}{\partial x^2}-k_{v_j}(v_b+v_s)-\beta_{v_j}\dfrac{\partial(v_b+v_s)}{\partial t}\end{cases} \tag{2}$$

式中：$k_{u_0}=0$，$k_{u_1}=k_u$，$k_{v_0}=0$，$k_{v_1}=k_v$，$\beta_{u0}=0$，$\beta_{u1}=\beta_u$，$\beta_{v1}=\beta_v$，$j=0,1$。

将式（1）、式（2）直接进行Fourier变换并整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}x^2}=(\bar{k}_{uj}+\mathrm{i}\bar{\beta}_{uj}\omega-\frac{\omega^2}{C_0^2})\hat{u} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^3\hat{v}_s}{\mathrm{d}x^3}+\dfrac{\omega^2}{C_0^2}\dfrac{\mathrm{d}\hat{v}_b}{\mathrm{d}x}+\dfrac{k'G}{ER_z^2}\dfrac{\mathrm{d}\hat{v}_s}{\mathrm{d}x}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{v}_s}{\mathrm{d}x^2}=(\bar{k}_{vj}+\mathrm{i}\omega\bar{\beta}_{vj}-\dfrac{\omega^2}{C_1^2})(\hat{v}_b+\hat{v}_s)\end{cases} \tag{4}$$

其中：C_1 为横波波速，$C_1=\sqrt{k'G/\rho}$，C_0 为纵波波速，$C_0=\sqrt{E/\rho}$，$R_z=\sqrt{I_z/A}$，$\bar{k}_{uj}=k_u/(EA)$，$\bar{k}_{vj}=k_v/(k'AG)$，$\bar{\beta}_{uj}=\beta_u/(EA)$，$\bar{\beta}_{vj}=\beta_u/(k'AG)$。

求解式（3）、式（4）得

$$\hat{u}(x,\omega)=a_1(\omega)e^{\mathrm{i}k_1x}+d_1(\omega)e^{-\mathrm{i}k_1x} \tag{5}$$

$$\hat{v}_b(x,\omega)=a_2(\omega)e^{\mathrm{i}k_2x}+d_2(\omega)e^{-\mathrm{i}k_2x}+a_3(\omega)e^{\mathrm{i}k_3x}+d_3(\omega)e^{-\mathrm{i}k_3x} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_s(x,\omega)=&g_2a_2(\omega)e^{\mathrm{i}k_2x}+g_2\,d_2(\omega)e^{-\mathrm{i}k_2x}+\\ &g_3a_3(\omega)e^{\mathrm{i}k_3x}+g_3\,d_3(\omega)e^{-\mathrm{i}k_3x}\end{aligned} \tag{7}$$

总挠曲位移

$$\begin{aligned}\hat{v}(x,\omega)=&\hat{v}_b(x,\omega)+\hat{v}_s(x,\omega)=\\ &(1+g_2)a_2(\omega)e^{\mathrm{i}k_2x}+(1+g_2)d_2(\omega)e^{-\mathrm{i}k_2x}+(1+g_3)a_3(\omega)e^{\mathrm{i}k_3x}+(1+g_3)d_3(\omega)e^{-\mathrm{i}k_3x}\end{aligned} \tag{8}$$

式中：$a_1(\omega)$、$a_2(\omega)$、$a_3(\omega)$ 为待定的入射波波幅；$d_1(\omega)$、$d_2(\omega)$、$d_3(\omega)$ 为待定的出射波波幅；k_1、k_2、k_3 为波数，即

$$k_{j1}(\omega)=\sqrt{\frac{\omega^2}{C_0^2}-\bar{k}_{uj}-i\omega\bar{\beta}_{uj}}$$

$$k_{j2,j3}(\omega)=\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4d}}{2}}\quad j=1,\ 2$$

其中：当 $j=1$ 时，$k_{u_1}=0$，$k_{v_1}=0$，$k_{11}(\omega)$、$k_{12}(\omega)$、$k_{13}(\omega)$ 对应23单元的波数；当 $j=2$ 时，$k_{u_2}=k_u$，$k_{v_2}=k_v$，$k_{21}(\omega)$、$k_{22}(\omega)$、$k_{23}(\omega)$ 对应12单元的波数。

$$b=\bar{k}_{uj}-\frac{\omega^2}{C_1^2}+i\omega\bar{\beta}_{vj}-\frac{\omega^2}{C_0^2}$$

$$d=(\bar{k}_{vj}-\frac{\omega^2}{C_1^2}+i\omega\bar{\beta}_{vj})(-\frac{\omega^2}{C_0^2}+\frac{k'G}{ER_z^{\ 2}})$$

$$g_{2,3}(\omega)=(k_{2,3}^2-\frac{\omega^2}{C_0^2})\Big/(\frac{1}{nR_z^{\ 2}})$$

式中 $n=E/k'G$。

轴力、剪力、弯矩和转角在频域中的表达式为

$$\hat{F}(x,\omega)=EA\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}x},\ \hat{Q}(x,\omega)=k'AG\frac{\mathrm{d}\hat{v}_s}{\mathrm{d}x},$$

$$\hat{M}(x,\omega)=EI_z\frac{\mathrm{d}^3\hat{v}_b}{\mathrm{d}x^3},\ \hat{\delta}(x,\omega)=\frac{\mathrm{d}\hat{v}_b}{\mathrm{d}x}\tag{9}$$

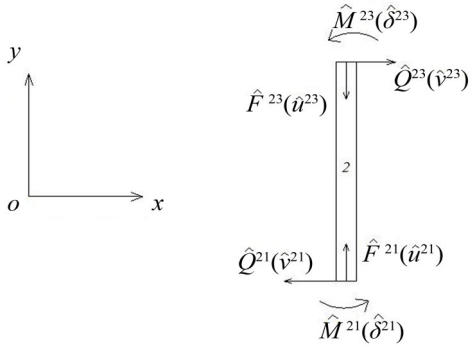
在频域中，对所有节点建立局部坐标系下的力平衡和位移协调条件，经过整理得

$$d^J=S^Ja^J+s^J\tag{10}$$

式中：a^J、d^J 表示 J 点入射波和出射波波幅向量，S^J 为节点 J 的局部散射矩阵，s^J 为局部源矢量。

对于节点1、3只连接一个单元，节点2连接两个单元，故 S^1、S^3 是3阶方阵，S^2 是6阶方阵。

在整体坐标系和局部坐标系下，以频域中节点2为例，如图2所示。



(a) 整体坐标系　　(b) 局部坐标系

图2　节点2处的整体坐标系和局部坐标系

列出节点2处的位移协调及力平衡条件

$$\begin{cases}\hat{F}^{21}(0,\omega)-\hat{F}^{23}(0,\omega)=0\\ \hat{Q}^{21}(0,\omega)-\hat{Q}^{23}(0,\omega)=0\\ \hat{M}^{21}(0,\omega)+\hat{M}^{23}(0,\omega)=0\\ \hat{u}^{21}(0,\omega)=-\hat{u}^{23}(0,\omega)\\ \hat{v}^{21}(0,\omega)=-\hat{v}^{23}(0,\omega)\\ \hat{\delta}^{21}(0,\omega)=\hat{\delta}^{23}(0,\omega)\end{cases}\tag{11}$$

将式(11)代入式(9)，整理合并为

$$d^2=S^2a^2+s^2$$

式中：

$$d^2=[d_1^{21},d_2^{21},d_3^{21},d_1^{23},d_2^{23},d_3^{23}]^{\mathrm{T}},$$

$$a^2=[a_1^{21},a_2^{21},a_3^{21},a_1^{23},a_2^{23},a_3^{23}]^{\mathrm{T}},$$

$$s^2=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$S^2=\begin{bmatrix}-i*k_{11} & 0 & 0 & i*k_{21} & 0 & 0\\ 0 & i*k_{12}*a_{12} & i*k_{13}*a_{13} & 0 & -i*k_{22}*a_{22} & -i*k_{23}*a_{23}\\ 0 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & 0 & k_{22}^2 & k_{23}^2\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1+g_{12} & 1+g_{13} & 0 & 1+g_{22} & 1+g_{23}\\ 0 & i*k_{12} & i*k_{12} & 0 & -i*k_{12} & -i*k_{12}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}-i*k_{11} & 0 & 0 & i*k_{21} & 0 & 0\\ 0 & i*k_{12}*a_{12} & i*k_{13}*a_{13} & 0 & -i*k_{22}*a_{22} & -i*k_{23}*a_{23}\\ 0 & -k_{12}^2 & -k_{13}^2 & 0 & -k_{22}^2 & -k_{23}^2\\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1-g_{12} & -1-g_{13} & 0 & -1-g_{22} & -1-g_{23}\\ 0 & i*k_{12} & i*k_{12} & 0 & -i*k_{12} & -i*k_{12}\end{bmatrix}$$

将所有节点的 a^J、d^J、S^J、s^J 组集到整体矩阵中，得到整体坐标系下的整体散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和整体源矢量 s，即

$$d=\boldsymbol{S}a+\boldsymbol{s}\tag{12}$$

结构的自由振动是指结构受到扰动离开平衡位置后不再受外力影响的振动过程。因此，结构在自振过程中，波源矩阵 $\boldsymbol{s}=0$，即

$$d=\boldsymbol{S}a\tag{13}$$

注意到，在同一杆件中，对一端而言的入射波和对另一端而言的出射波之间存在一相位关系。以纵波为例，从节点 J 来看，一个出射波由杆件 JK 的 J 点产生后，沿着该杆件向 K 点传播，其表达式为

$$\hat{u}^{JK}\left(x^{JK},\omega\right)=a_1^{JK}(\omega)e^{-ik_1x^{JK}}\tag{14}$$

由杆件的节点 K 来看，此波属于出射波，其表达式为

$$\hat{u}^{KJ}\left(x^{KJ},\omega\right)=d_1^{KJ}(\omega)e^{-ik_1x^{KJ}}\tag{15}$$

由局部坐标系的定义可知，有如下对应关系

$$\hat{u}^{JK}\left(x^{JK},\omega\right)=-\hat{u}^{KJ}\left(x^{KJ},\omega\right)\tag{16}$$

将式(16)代入式(14)、式(15)，整理成广义的形式为

$$a^{JK}(\omega)=\boldsymbol{P}^{JK}\left(l^{JK},\omega\right)d^{KJ}(\omega) \tag{17}$$

其中：$\boldsymbol{P}^{JK}\left(l^{JK},\omega\right)$称为传播矩阵，表示如下

$$\boldsymbol{P}^{JK}\left(l^{JK},\omega\right)=\mathrm{diag}\left\{-e^{-\mathrm{i}k_1l^{JK}}-e^{-\mathrm{i}k_2l^{JK}}-e^{-k_3l^{JK}}\right\}$$

l^{JK}表示杆件JK的长度。

将向量$a^{Jk}(\omega)$、$d^{KJ}(\omega)$组集到总体入射波波幅向量a和总体出射波波幅向量d中，有

$$a(\omega)=\boldsymbol{P}\bar{d}(\omega)$$

由于$\bar{d}$与d只是各元素的相对位置有所变化，故引入$\boldsymbol{U}$，以调节$\bar{d}$中各元素在总体坐标系中的相对位置，得

$$\bar{d}(\omega)=\boldsymbol{U}d(\omega)$$

则

$$a(\omega)=\boldsymbol{PU}d(\omega) \tag{18}$$

将式(18)代入式(13)可求解埋置结构的自振特性方程为

$$\left[I-\boldsymbol{R}(\omega)\right]d(\omega)=\{0\} \tag{19}$$

其中：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{SPU}$，称为回传射线矩阵。

针对黏弹性地基，需考虑土体阻尼对振动衰减作用，自振频率为复数，且$\omega=\omega_{(n)}+i*\delta_{(n)}$，在弹性地基中$\omega=\omega_{(n)}$，其中$\omega_{(n)}$即为桩基的自振频率，$\delta_{(n)}$为衰减系数。

$d(\omega)$有非零解的条件为$\left|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}(\omega)\right|=0$，是关于$\omega$的非线性复数超越方程。由线性代数理论可知

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]*\mathrm{adj}\,[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]=\det[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]*E$$

式中：$\det[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$表示矩阵$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$的模，$\mathrm{adj}\,[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$表示$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$表示与$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]$同阶的单位矩阵。

则

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]*\mathrm{adj}\,[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}]=0$$

在如图(3)所示的极坐标$\rho-0-\theta$下，令$\rho=\sqrt{\omega_{(n)}{}^2+\delta_{(n)}{}^2}$，$\theta=\arctan(\delta_{(n)}/\omega_{(n)})$，由$\mathrm{d}\rho$和$\mathrm{d}\theta$组成的每个局域运用迭代法(黄金搜索法和二分法[11])进行迭代求解，用二分法搜索出行列式实部和虚部变号的点，再用黄金分割法搜索行列式模的极小值点，$\mathrm{adj}\left|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}(\omega)\right|$的每一个非零列可看做桩土系统自由振动时非零出射波幅向量$d(\omega)$。当行列式的模小于预先给定的误差时，停止迭代，则结构的自振频率为$\omega_{(n)}=\rho\cos\theta$，衰减系数为$\delta_{(n)}=\rho\sin\theta$，通过式(18)，可求得$a(\omega)$，将$a(\omega)$、$d(\omega)$代入式(5)、式(8)，可求出结构在频域里的轴向、横向位移表达式，将位移归一化，可求解桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时桩基的振型曲线。

令式(1)、式(2)中$\beta_{uj}=0$，$\beta_{vj}=0$，同理可求解桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振特性。

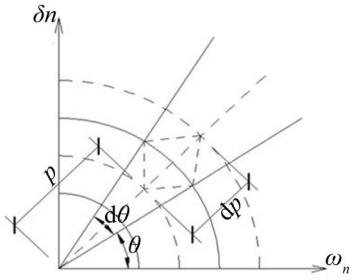


图3 极坐标搜索示意图

2 数值结果与分析

桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时桩-土的计算模型如图1(a)所示，桩土相互作用用并联的弹簧和黏壶来模拟，桩底为黏弹性支撑，$l_{12}=6$ m，$l_{23}=4$ m，$I_z=8.33\times10^{-2}$ m^4，泊松比$\mu=0.18$，截面面积$A=1$ m^2，弹性模量$E=2.5\times10^{10}$ Pa，密度$\rho=2\,400$ kg/m^3。

2.1 桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振特性分析

桩土相互作用用弹簧模拟，参考文献[13]中数值，取纵向弹簧系数$K_u=1.5\times10^6$ N/m^2，横向弹簧系数$K_v=3\times10^6$ N/m^2，桩底弹簧系数$K_t=3\times10^6$ N/m^2。根据回传射线矩阵法和黄金分割法及二分法，编写计算任意阶数的自振频率和振动模态的MATLAB程序，并与有限元商业软件SAP2000将单桩离散为40个单元的分析结果对比，计算结果如表1所示。

表1 桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基时桩的前8阶自振频率

阶数	SAP2000/Hz	MRRM/Hz	*error*/(%)
1	47.36	47.688	0.692 6
2	198.06	197.246	0.411
3	510.09	507.528	0.502
4	523.31	519.458	0.736
5	963.05	959.720	0.346
6	1 483.30	1 475.161	0.549
7	1 508.00	1 521.027	0.863 9
8	2 055.10	2 038.112	0.827

Note: error=$\left|\mathrm{MRRM}-\mathrm{ANSYS}\right|/(\mathrm{ANSYS})\times100\,\%$

结果表明，基于回传射线矩阵法，用黄金分割法和二分法求解自振频率所得结果与SAP2000的计算结果非常接近，其相对误差控制在1 %之内，进而验证了回传射线矩阵法求解埋置结构自振频率的有效性和计算精度。

振动模态如图4所示，从振型图对比可知，利用回传射线矩阵法和有限元方法求解的模态结果吻合很好，从而进一步验证了利用回转射线矩阵法分析埋置结构自振特性的有效性。

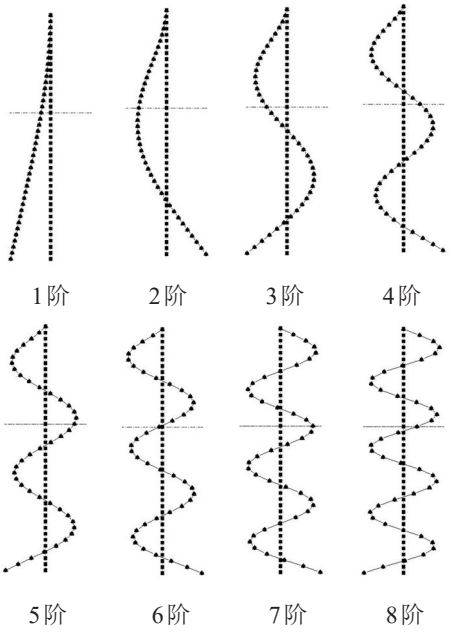


图4 桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的前8阶模态

2.2 桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时桩的自振特性分析

桩土相互作用用并联的弹簧和黏壶来模拟，参考文献[13]中数值，3种工况下土体弹簧和土体阻尼对桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时土体的计算参数如表2所示。

表2 黏弹性地基中土体的计算参数

工况	k_u	β_u	k_v	β_v	k_t	β_t
1	1.5×10^6	3×10^5	3×10^6	9×10^5	1×10^8	1.5×10^7
2	0	3×10^5	0	9×10^5	0	1.5×10^7
3	1.5×10^6	1.5×10^5	3×10^6	4.5×10^5	1×10^8	1×10^7

注：弹簧系数单位为 N/m^2，阻尼系数单位为 $N\cdot s/m^2$

通过回传射线矩阵法和求根法计算得到前8阶自振频率和衰减系数如表3、表4所示。

随着阶数的增大，结构的自振频率逐渐增大，衰减系数逐渐减小。工况1的各阶自振频率略大于工况2的各阶自振频率，尤其是第5阶之后，随着阶数的增大，频率值增大的幅度更明显，说明随着土体弹簧系数增大，结构的各阶自振频率也增大，尤其是高阶频率值增长明显。这一结果与文献[7]的结论一致；工况1、工况2的各阶衰减系数相等，说明土体弹簧系数对结构的衰减系数没有影响。工况1的各阶自振频率小于工况3的各阶自振频率，说明随着土体阻尼系数减小，结构的自振频率增大，特别是低阶自振频率增长明显；工况1的各阶衰减系数远大于工况3的各阶衰减系数，说明随着土体阻尼系数减小，结构的衰减系数减小。

表3 3种工况下桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基时桩的前8阶自振频率

阶数	MRRM		
	工况1	工况2	工况3
1	116.810	116.772	180.683
2	504.150	504.131	515.619
3	920.267	920.244	927.352
4	1 419.623	1 418.135	1 423.778
5	1 929.416	1 920.462	1 932.187
6	2 451.735	2 446.715	2 453.869
7	2 958.854	2 938.428	2 960.579
8	3 467.504	3 411.169	3 468.598

表4 3种工况下桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基时桩的前8阶衰减系数

阶数	MRRM		
	工况1	工况2	工况3
1	177.753	177.753	88.999
2	167.102	167.102	83.709
3	168.864	168.864	84.464
4	161.550	161.550	80.764
5	162.158	162.158	80.090
6	160.077	160.077	80.025
7	160.312	160.312	80.161
8	157.027	157.027	78.448

图5展示了3种工况下桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时桩基的振型曲线。随着阶数的增大，工况1、2的振型曲线基本一致，表明土体弹簧系数对结构的振型有一定的影响，但影响较小；工况1、3的振型曲线表现为低阶振型受土体的影响大于高阶振型，随着阶数的增加，各振型曲线趋于重合，表明土体阻尼系数对结构的低阶振型影响尤为明显，对高阶振型的影响较小。

3 结　语

将回传射线矩阵法推广至桩土系统的振动分析中，求解了桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振特性，同时，分析了桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基中时土体弹簧系数及土体阻尼系数对桩基自振频率和振型的影响。得出以下结论：

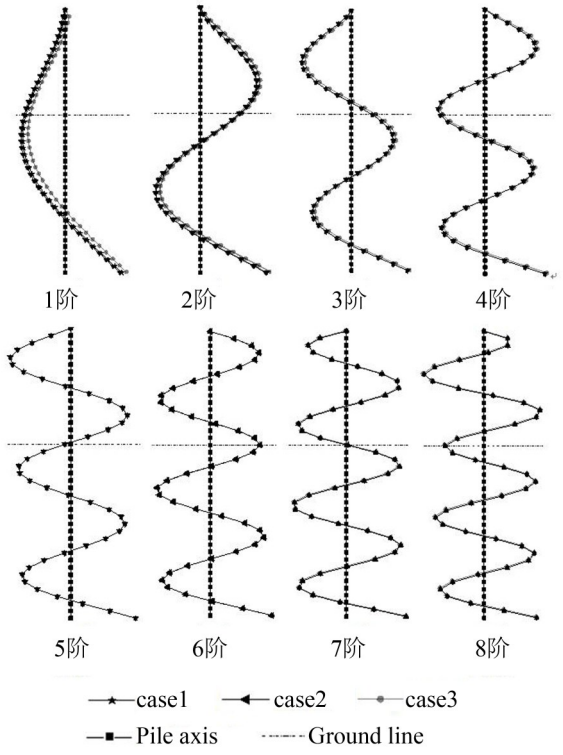


图 5 桩顶固定并部分桩体埋入黏弹性地基时桩的前8阶模态

(1) 应用回传射线矩阵法和有限元方法求解桩顶固定并部分桩体埋入弹性地基中时桩的自振频率和振动模态结果吻合很好，验证了利用回转射线矩阵法分析埋置结构自振特性的有效性和计算精度。

(2) 随着自振阶数的增大，埋置结构的自振频率逐渐增大，衰减系数逐渐减小。

(3) 随着土体弹簧系数增大，埋置结构的各阶自振频率增大，尤其是高阶频率值增长明显，对衰减系数没有影响，对埋置结构的振型有一定的影响，但影响较小。

(4) 随着土体阻尼系数的减小，埋置结构的各阶自振频率增大，特别是低阶自振频率增长明显，衰减系数相应减小；土体阻尼系数对埋置结构的低阶振型影响尤为明显，对高阶振型的影响较小。

(5) 在实际工程中应用回传射线矩阵法时，只要输入待定测试参数（杨氏模量、材料密度、埋置桩长、外露长度等），通过简单的语言程序就可以求解埋置结构的自振频率和振动模态，从而指导工程实践。

参考文献：

[1] 赵明华，杨晶，杨明辉. 考虑桩土相互作用的变截面高墩自振频率计算分析[J]. **岩石力学**，2010，31(8)：2507-2518.

[2] 陶 磊，张俊发，陈厚群. 考虑土-结构动力相互作用的冷却塔地震响应分析[J]. **振动与冲击**，2016，35(23)：81-89.

[3] VAHID SHIRGIR, ALI GHANBARI, MOHSEN SHAHROUZI. Natural requency of single pier bridges considering soil- structure interaction[J]. **Journal of Earthquake Engineering**, 2016, 20(6): 611-632.

[4] 张海顺，姜忻良，张亚楠. 高架桥-地铁站-桩-土复杂结构体系地震反应分析[J]. **工程力学**，2013，30（Z）：53-58.

[5] 周勇军，张晓栋，宋一凡，等. 高墩连续刚构桥纵向振基频的能量法计算公式[J]. **长安大学学报**(自然科学版)，2013，33（3）：48-54.

[6] MORFIDIS K. Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation[J]. **Computers and Structures**, 2010, 88:294-308.

[7] 彭丽，丁虎，陈立群. 黏弹性三参数地基梁横向自由振动[J]. **振动与冲击**，2014，33(1)：101-105.

[8] 彭丽，丁虎，陈立群. 黏弹性三参数地基上Timoshenko梁横向自由振动[J]. **噪声与振动控制**，2013，33（5）：107-111.

[9] PAO Y H, HEH D C, HOWARD S M. Dynamic response and wave propagation in plane trusses and frames[J]. **AIAA Journal**, 1999, 37 (5): 594-603.

[10] 郭永强. 回传波射矩阵法的理论及其应用[D]. 杭州：浙江大学，2008.

[11] 缪馥星. 框架振动和瞬态响应的回传波射矩阵法研究[D]. 上海：上海交通大学，2009.

[12] 李克磊，聂国华. 基于回传波射矩阵法的空间杆系结构固有特性及结构阻尼影响分析[J]. **力学季刊**，2014，35(4)：578-588.

[13] KARGARNOVIN M H, YOUNESIAN D, THOMPSON D J, et al. Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads[J]. **Computers and Structures**, 2005, 83(5): 1865-1877.