文章编号：1006-1355(2018)01-0164-07

综合交通枢纽的振动特性与舒适度研究

崔聪聪，雷晓燕，张 凌，张 晗

（华东交通大学 铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心，南昌 330013）

摘 要：综合交通枢纽车站是一种新型建筑物，由于列车运动对建筑物振动的影响是一个复杂的过程，目前对客运站振动舒适性的分析和评价没有统一的方法和标准，有必要对综合交通枢纽车站的振动特性与舒适度进行研究。首先，汇总相关标准，得到不同国家的振动标准评价量，比较选取适合综合枢纽车站的评价标准，以南昌西站站房结构为例，对其进行模态分析、谐响应分析，提取车站不同结构层关键点的振动响应，研究其位移导纳、速度导纳、加速度导纳随着频率的变化，研究结果表明车站处于上柔下刚的结构体系，纵向刚度小于横向、竖向刚度，实际工程中应注意结构的纵向稳定性问题，在谐响应荷载的作用下，结构整体处于1 Hz～20 Hz的低频振动，不同结构层的响应敏感频率不同，根据其自振频率研究振动舒适度问题，最终综合德国标准与烦恼率模型得到的新的振动限值，为后期综合交通枢纽舒适度评价提供参考。

关键词：振动与波；综合交通枢纽；模态分析；谐响应分析；动力响应；烦恼率模型；舒适度评价

中图分类号：O422.6 **文献标识码**：A **DOI编码**：10.3969/j.issn.1006-1355.2018.01.033

Study on Vibration Characteristics and Comfort of Integrated Transportation Hub

CUI Cong-cong , LEI Xiao-yan , ZHANG Ling , ZHANG Han

(Engineering Research Center of Railway Environment Virbration and Noise, Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract : The integrated traffic hub station is a new type of building structures. Since the influence of train traveling on the vibration of the buildings is a complicated process, there is no common method and standard for the analysis and evaluation of the vibration comfort of the passenger stations. In this paper, the vibration characteristics and comfort of the traffic hub station are studied. First of all, the relevant standards are collected and summarized and the evaluation criteria of vibration standards in different countries are obtained. Then, the evaluation criteria suitable for the integrated hub stations are selected. With the station structure of Nanchang West Station as an example, its modal analysis and harmonic response analysis are done and the vibration responses of some key points in different stories of the station are extracted. Variations of the displacement admittance, velocity admittance and acceleration admittance with frequencies are studied. The results show that structure of the station is upper part flexible and lower part rigid. Its longitudinal stiffness is smaller than the transverse and vertical stiffness. So, one should pay more attention to the longitudinal stability of the structure. Under the action of the harmonic response load, vibration of the whole structure is the 1 Hz-20 Hz low frequency vibration. In the low frequency vibration, the sensitive response frequencies are different for different stories of the structure. Finally, according to its natural frequency, the comfort problem is studied, and the new vibration limit is obtained in reference to the Germany standard and annoyance rate model. This work has provided a reference for comfort evaluation of integrated transport hub stations.

Key words : vibration and wave; integrated transportation hub; modal analysis; harmonic response analysis; dynamic response; annoyance rate model; comfort evaluation

收稿日期：2017-05-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目(51478184)；
国家自然科学基金资助项目（51608202）
江西省教育厅项目（GJJ160522）

作者简介：崔聪聪（1991－），女，山东省莱阳市人，硕士研究生，从事铁路环境振动与噪声研究。
E-mail: 18353121945@163.com

通信作者：雷晓燕（1956－），男，江西省丰城市人，教授，博士，从事铁路环境振动与噪声研究；
E-mail: xiaoyanlei2013@163.com

国内学者近年来在舒适度的研究上做了大量工作并取得了一定成绩，宋志刚从心理学角度对人对振动环境的主观反映有明显的模糊性和随机性进行了分析[1－2]，结合人对振动主观反映调查结果，给出了相应的模糊隶属度和条件概率分布形式，从而建立了人对振动的主观反映模糊随机评价模型。谢伟平针对某大学体育馆楼板振动舒适度问题，建立楼板计算模型，计算楼板在不同边界条件下的自振频

率，得到不利情况下的加速度，进行舒适度评价[4]。袁爱民在已有的烦恼率模型的基础上结合各国规范采用烦恼率评价人行桥的振动舒适度，提出了更适合工程应用的人行桥振动烦恼率曲线[5]。法永生提出了考虑人行桥竖向与侧向耦合的振动舒适度评价新方法[6]。

大型交通枢纽的振动舒适度研究涉及到多种振动源的综合作用，目前对客运站振动舒适性的分析和评价没有统一的方法和标准。因此对于大型桥建合一客运站如何有效地将振动的水平控制在工程和人们可接受的水平，对其振动候车舒适性进行分析和评价十分必要。因此有必要对综合交通枢纽的大跨度楼板的舒适性进行分析，本论文根据综合交通枢纽自身的振动特点，考虑新的振动限值，可以为后期综合交通枢纽舒适度评价提供参考。

1　振动舒适度评价方法

在结构设计时通过(1)频率调整法(2)限制动力响应法两个方面来保证结构楼盖的振动舒适度，目的在于提出一个适用于高架车站这种结构形式的楼板振动限值，一方面根据楼板的振动限值，在设计阶段改进楼板刚度，另一方面作为车站内的舒适度评价标准，如果超出限值需要对车站进行减振优化设计。

1.1　振动标准

综合不同国家的振动标准规范见表1环境振动标准评价量见表2。

1.2　烦恼率计算模型

从心理学信号检测理论的角度看,人对振动的主观反应包括两个环节：(1)感知到振动信号；(2)依据某种标准对感受到的信号做出判断或评价。而基于烦恼率模型的人行桥振动舒适度评价方法可以考虑人的主观反映判断的模糊性。

对于离散情况，有

$$A(x_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m}v_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}n_{ij}}=\sum_{j=1}^{m}v_j p(i,j) \tag{1}$$

式中 $A(x_i)$ 为第 i 个振动强度 x_i 下的烦恼率，振动强度常用频率记权后的均方根加速度表示；n_{ij} 为第 i 个振动强度下第 j 种主观反映的人数；v_j 为第 j 主观反应的概念隶属度，$v_j=\frac{j-1}{m-1}$；m 为主观反应的等级数，如果采用5级描述(“无振感”、“轻振感”、“中等振感”、“强振感”、“无法忍受”)，那么 $m=5$；$\sum_{j=1}^{m}n_{ij}$ 为该振动强度下的统计总人数；$p(i,j)=n_{ij}/\sum_{j=1}^{m}n_{ij}$，反映了人感受程度的差异。

对于连续分布的情况有

$$A(x_i)=\int_{u_{\min}}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_{\log_e u}}\exp\left[\frac{-(\log_e(u/x)+0.5\,\sigma^2_{\log_e})^2}{2\sigma^2_{\log_e}}\right]\times v(u)\mathrm{d}\,u \tag{2}$$

表1　不同国家的振动标准

国家/组织	参考标准	标准名称
国际标准化组织	ISO 2631-1:1997	《人承受全身振动的评价：一般要求》
	ISO 2631-2:2003	《人承受全身振动的评价：建筑物内振动》
欧洲	EN 14253-2004	《机械振动.全身受振对人体健康影响的测量和评价.实施指南》
美国	ANSI S3.29-1983	《建筑物中人的受振评价》
德国	DIN 4150-2	《建筑物内人体的振动暴露》
澳大利亚	AS 2670.1-2001	《人在全身振动中的评价》
英国	BS 6472:2008	《建筑物内人体的振动暴露评价指南》
日本	JIS Z8735-1981	《振动级测定方法》
中国	GB 10070-1988	《城市区域环境振动标准》
	GB/T 13441.1-2007	《机械振动和冲击人体暴露于全身振动的评价第一部分
	GB/T 13441.2-2008	《机械振动和冲击人体暴露于全身振动的评价第二部分

表2　环境振动标准评价量

评价量	计权等效加速度 α_w	4次方振动剂量VDV	最大瞬时振动值MTVV
相关标准	ISO2 631-1:1997 ISO 2631-2:2003 AS 2670.1-2001 ANSI S3.29-1983	ISO 2631-1:1997 AS 2670.1-2001	ISO2631-1:1997

式中 $\sigma_{\log_e}=\log_e(1+\delta^2)$，$\delta$ 为感受性差异的变异系数，取值为0.1～0.5；$v(u)$ 为模糊隶属度函数，与频率计权后的振动加速度有关

$$\begin{aligned} v(u)&=0 && u<u_{\min}\\ v(u)&=a\log_e(u)+b && u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}\\ v(u)&=1 && u>u_{\max}\end{aligned} \tag{3}$$

$u_{\min}$ 是指振动“感觉不到”或者认为振动“无影响”的振动加速度上限，而是指振动“无法忍受”的振动加速度下限，$u_{\min}$ 和 $u_{\max}$ 由实验给出，而 a、b 为待定常数，可以通过求解如下代数方程组得到

$$\begin{aligned} a\log_e(u_{\min})+b&=0\\ a\log_e(u_{\max})+b&=1\end{aligned} \tag{4}$$

烦恼率是振动环境下认为“振动不能忍受”的人数占暴露在该振动下的总人数的比例。文献[1－2]对烦恼率计算方法得到的烦恼率与振动舒适度实验、振动舒适度标准进行了比较，结果表明上述烦恼率计算方法的结果与实验和标准的结果是相当吻合的。

根据宋志刚在论文中的研究，变异系数 δ 等于0.1、0.3、0.5时得到的烦恼率-容许下限曲线较为一致[1]，此论文所选取的变异系数为0.3，烦恼率模型在变异系数为0.3时得到的烦恼率曲线见图1。

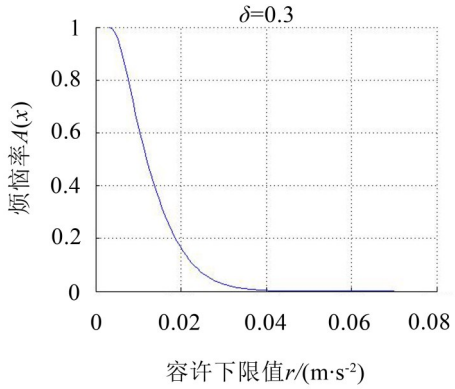


图1 烦恼率曲线

通过烦恼率模型得到中国城市区域环境振动标准的待定系数 a，b 见表3。

2 综合枢纽车站计算模型

南昌西站主体由下到上依次为地下层、轨道层、高架层、高架夹层。站房主体最高点距离地面41.7 m，建筑外墙南北进深385.5 m东西宽133 m，设有站台12座，其中基本站台2座；旅客到发线22条，正线4条。候车厅层位于整个站房结构地上二层，标高约8.5 m，通过伸缩缝南昌西站候车厅楼板划分为三个区域，南昌西站东西方向柱网尺寸18 m+18 m+18 m+25 m+18 m+18 m+18。南北22 m+30 m+51.5 m+53 m+42 m+42 m+53 m+51.5 m+30 m+22 m。

有限元模型的建立：南昌西站综合交通枢纽站房有限元模型中钢轨用空间梁单元BEAM188模拟；钢轨扣件和轨道板支座采用弹簧阻尼单元COMBIN14模拟；轨道梁采用实体单元SOLID45模拟；上部结构中的梁、柱和杆件采用BEAM181单元进行模拟，各层楼板楼板采用SHELL163单元模拟。

表3 中国城市区域环境振动标准
通过烦恼率模型得到的待定系数 a、b

地点	振级范围		昼间	夜间
	昼间	夜间	a	a
	振级/dB	振级/dB	b	b
	加速度/(m·s^{-2})			
特殊	65	65	0.721 3	0.721 3
住宅区	0.001 8	0.001 8	4.558 9	4.558 9
居民、	70	67	0.721 3	0.721 3
文教区	0.003 2	0.002 2	4.143 9	4.414 1
商业	75	72	0.721 3	0.721 3
中心区	0.005 6	0.004	3.740 2	3.982 9
工业	75	72	0.721 3	0.721 3
集中区	0.005 6	0.004	3.740 2	3.982 9
交通干	75	72	0.721 3	0.721 3
线两侧	0.005 6	0.004	3.740 2	3.982 9
铁路干	80	80	0.721 3	0.721 3
线两侧	0.01	0.01	3.321 9	3.321 9

南昌西站楼板厚度选取0.2 m，根据刚度等效的原则，通过增加混凝土板厚来考虑装饰面层等非结构构件对结构动力特性的影响，根据文献[11]的实测分析拟增加6 cm的混凝土板厚来模拟装饰面层。考虑装饰面层后关键结构层1阶自振频率变化见表4

表4 结构层1阶自振频率变化

楼板装饰情况	不同结构层	
	大跨度商业夹层	楼板层
无建筑面层	2.412 9 Hz	3.221 5 Hz
有建筑面层	2.237 3 Hz	3.001 8 Hz

3 客运站结构的动力特性分析

3.1 模态分析

通过建立南昌西站综合交通枢纽站房有限元模型见图2，根据有限元模型得到的结构层的前几阶自振频率与振型见表5。

通过提取有限元模型前300阶振型，大多数竖向振动都集中在大跨度屋盖和悬挑处，并且大跨度屋盖竖向阵型出现的密集，可以看出相对于整体结构来讲大跨度屋盖和悬挑楼板竖向较柔。

前几阶振型单独出现在楼板，商业夹层与屋顶层，随着自振频率的增加，楼板结构与屋顶结构在自

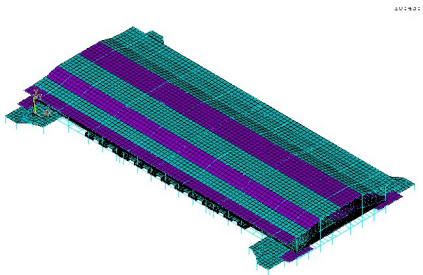


图2 南昌西站有限元模型

表5 枢纽车站的自振频率与振型

位置	主模态	振动频率/Hz	振型
屋顶	1	1.007 2	屋顶部分纵向平动
	2	2.308 2	屋顶悬挑竖向翘曲
	3	4.525 4	屋顶中部竖向弯曲
候车厅层	1	3.001 8	楼板的纵向平动
	2	3.802 7	楼板局部竖向弯曲
	3	4.400 7	楼板局部竖向弯曲
高架夹层	1	2.237 3	楼板的纵向平动
	2	2.753 2	楼板的竖向弯曲
	3	3.298 7	楼板的竖向弯曲
轨道层	1	5.962 1	轨道梁纵向平动
	2	6.012 7	轨道梁横向变形
	3	9.326 4	轨道梁竖向变形

振频率处出现重叠。

从振型的形状看，结构的第1阶振型为纵向变形，说明结构的纵向刚度小于横向刚度，实际工程中应注意结构的纵向稳定性问题。

从频率的增长趋势看，第1阶固有频率向各高阶固有频率的增长缓慢，没有明显跳跃，振型的形状并不复杂，说明结构的动力性能较好。

结构整体处于上柔下刚的结构体系，当结构的自振频率在2 Hz～3 Hz时楼板出现竖向振动，与人致振动的频率相接近，后期可以考虑人致振动的舒适度问题。

3.2 谐响应分析

对综合交通枢纽进行谐响应分析，得到位移、速度、加速度随频率的变化，确定枢纽共振频率以及结构对不同频率的响应特性。

阻尼比是结构模型一个重要参数，结构阻尼对结构的自振特性和动力反应都有较大的影响，南昌西站计算模型的阻尼比根据我国《高层建筑混凝土结构技术规程》(JGJ3-2010)规定取0.05。

在结构的动力计算中采用Rayleigh阻尼，又称比例阻尼，根据模态分析计算得到 $\alpha=0.314$ $\beta=0.007\,9$。

谐响应分析在有限元模型上的具体加载形式：在二十二条到发线，四条正线模型跨中考虑两个轮对，每个轮对各加一个幅值10 kN的作用力，取荷载频率变化范围0～80 Hz，每1 Hz求解一次，提取枢纽结构振动敏感点，对关键点在谐响应下的位移、速度、加速度进行分析。加载形式如图3。

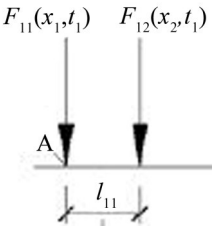


图3 加载形式

通过谐响应分析对导纳等振动特性进行分析

$$\text{系统位移导纳 } Y_{\dot{x}}=\frac{1}{k-\omega^2 m+\mathrm{i}\omega x} \tag{5}$$

$$\text{速度导纳 } Y_{\dot{x}}=\mathrm{i}\omega Y_x \tag{6}$$

$$\text{加速度导纳 } Y_{\ddot{x}}=-\omega^2 Y_x \tag{7}$$

3.2.1 楼板响应

选取有限元模型如图4。

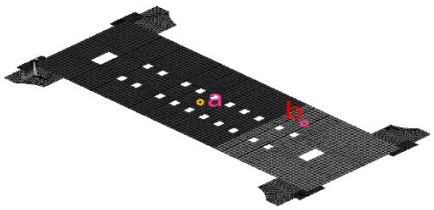


图4 楼板响应点

(1) 楼板的跨度为25 m跨中位置(a)对应的节点响应，相应的位移导纳、速度导纳、加速度导纳随着频率的变化如图5。

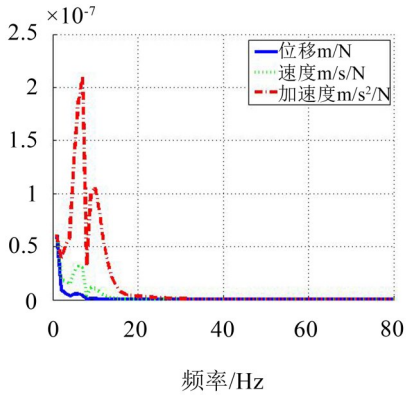


图5 种导纳对比分析

(2) 根据楼板的伸缩缝选取第三块跨度为18 m楼板中部(b)对应的节点响应如图6。

3.2.2 屋顶响应

选取有限元模型如图7，选取的关键点用c，d，e表示。

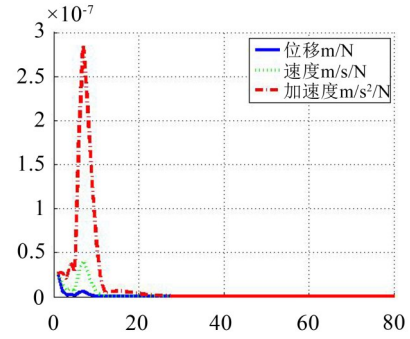


图 6 三种导纳对比分析

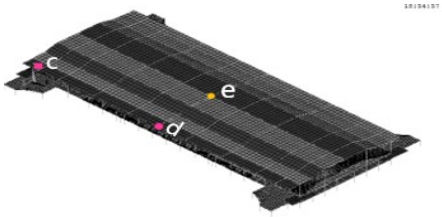


图 7 屋顶层响应点

（1）屋顶顺轨方向悬挑端部(c)位置节点响应如图8。

（2）屋顶悬挑顺轨位置悬挑结构(d)节点响应见图9。

（3）屋顶跨中位置(e)节点响应如图10。

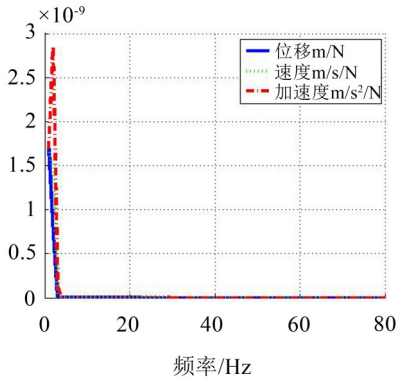


图 8 三种导纳对比分析

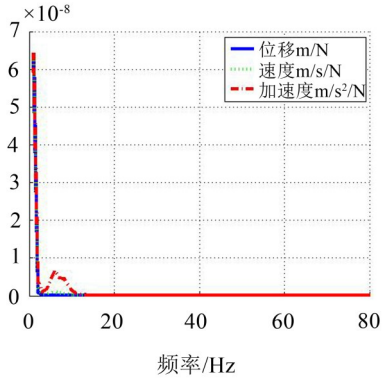


图 9 三种导纳对比分析

3.2.3 高架夹层

高架夹层频率敏感点的有限元模型如图11，有限元模型对应的节点响应如图12。

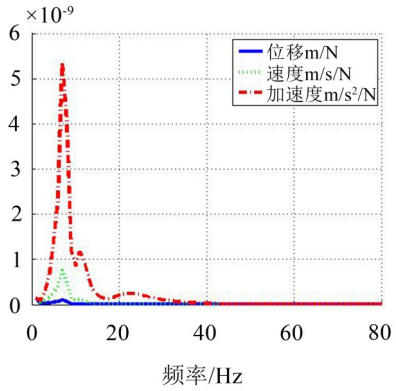


图 10 三种导纳对比分析



图 11 高架夹层响应点

通过谐响应分析可以看出，楼板的位移、速度、加速度的响应变化趋势一致，枢纽结构整体在1 Hz～10 Hz附近幅值相对较大，与模态分析中结构整体频率偏低相对应。

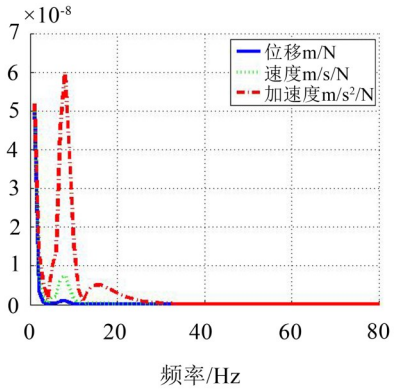


图 12 三种导纳对比分析

不同结构层的振动能量在对应结构自振主频的频率附近相对增大，出现共振放大效应，候车厅层的振动主频在3 Hz～6 Hz左右，屋顶位置自振主频在1 Hz～3 Hz，大跨度商业夹层的自振频率在2 Hz～5 Hz左右。

通过提取南昌西站综合交通枢纽有限元模型的节点，节点位置分别位于楼板位置，屋顶位置和大跨度商业夹层，不同节点处的加速度响应随着高度的增大逐渐减少，大跨度悬挑商业夹层的振动响应小于楼板的响应，但是大跨度悬挑结构商业夹层跨度大，自振频率与人行荷载频率接近，其舒适度问题应该得到重视。

同样的谐荷载作用下25 m的大跨度楼板的响应比18 m的大跨度楼板大，振动主频较为一致。

对各个敏感点进行分析，不同的敏感点出现的位移峰值主要集中在1 Hz～20 Hz所以枢纽结构的振动响应属于低频振动。

4　舒适度评价

综合枢纽车站的振动舒适度研究评价以建筑物振动对人的影响为主，制定新的限值主要为建筑物的设计提供依据。

德国DIN4150《建筑物内人体的振动暴露》是根据振动的特性如振源形式、强度、频率分布、作用时间及居民生理，心理健康状况与居家环境因素，建立的一套评估规范。

根据区域使用功能的不同，由工业区，商业区，住宅区到特别振动区域振动限值逐渐减少，冲击振动限值大于连续振动限值，连续振动限值大于间歇振动限值，白天振动限值大于晚上振动限值。振动限值K的计算公式为

$$K=\frac{20.2A_{\max}}{\left[1+\left(f/f_0\right)^2\right]^{1/2}} \tag{8}$$

$A_{\max}$为楼板系统评价点的加速度峰值（m/s^2），f为楼板的基本频率f_0=5.6，“房桥合一”的综合交通枢纽车站由于存在车致振动，因此将振源按照冲击振动考虑；夜间上车的旅客并不在候车厅内过多的休息和停留，故候车厅夜间的振动限值与白天的振动限值取相同值。

振动限值K选取冲击振动的白天的限值即K≤6，代入公式可以得到峰值加速度限值，见公式为

$$A_{\max}\leqslant 0.297\sqrt{1+0.031\,9f^2} \tag{9}$$

根据谐响应分析可以看出楼板的竖向挠曲振动对应的频率在3 Hz～5 Hz，由此算出算出候车厅楼板的峰值加速度限值为0.34 m/s^2 ～ 0.4 m/s^2。

新的结构振动限值大于美国钢结构协会发布的《钢结构设计AISC-11的评价标准》的限值15 cm/s^2。

利用烦恼率模型得到烦恼率曲线验证其可行性。根据德国标准可知新的振动限值的均方根加速度上限0.042 5～0.05 m/s^2，因此得到下限值为0.012 5 m/s^2。烦恼率曲线见图13、图14。

通过图13可以看出烦恼率为7 %时容许下限值为0.025，此时a=0.721 3，b=3.1610，g根据振动加速度限值，计算得到振级为85 dB，根据以上烦恼率曲线可以得到振动限值x=0.012 5 m/s^2对应的烦恼率值为0.07左右，即结构振动强度达到振动限值时，室内7 %的旅客受到干扰反应，振动强度为2x时，烦恼率为47 %，4x下的烦恼率为89.9 %，结果与振动舒适度标准对于不同振动水平下人的主观反映描述较为一致。

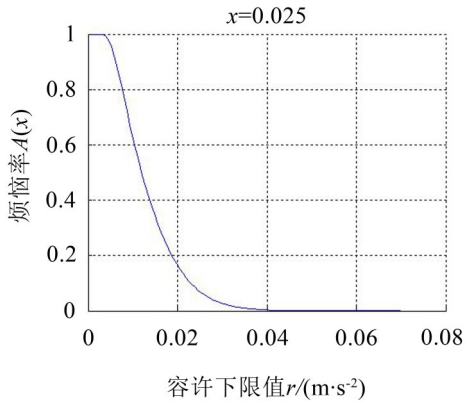


图13　烦恼率曲线

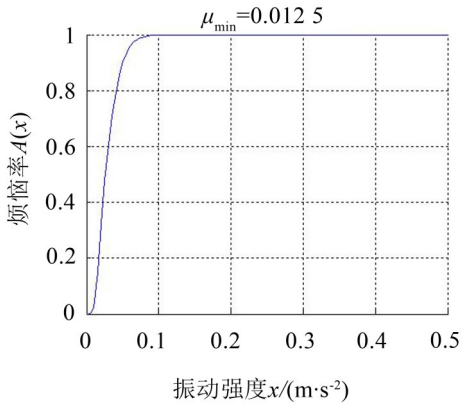


图14　振动强度与烦恼率曲线

最终推荐综合交通枢纽结构应适当增大振动限值。用新的振动限值评价综合枢纽车站的舒适度。

5　结　语

（1）通过模态分析得到结构的纵向刚度小于横向、竖向刚度，实际工程中应注意结构的纵向稳定性问题，从频率的增长趋势看，第1阶固有频率向各高阶固有频率的增长缓慢，没有明显跳跃，振型的形状并不复杂，说明结构的动力性能较好。

（2）结构整体处于上柔下刚的结构体系，当结构的自振频率在2 Hz～3 Hz时楼板出现竖向振动，与人致振动的频率相接近，后期可以考虑人致振动的舒适度问题。

（3）通过谐响应分析得到不同的敏感点出现的位移峰值主要集中在1 Hz～20 Hz所以枢纽结构的振动响应属于低频振动，候车厅层的振动主频在3 Hz～6 Hz左右，屋顶位置振动主频在1 Hz～3 Hz，大跨度商业夹层的振动主频在2 Hz～5 Hz左右。大跨度悬挑商业夹层的振动响应小于楼板的响应，但

是大跨度悬挑结构商业夹层跨度大，自振频率与人行荷载频率接近，其舒适度问题应该得到重视。

（4）与现有的舒适度评价方法相比，采用德国标准给出的新的振动限值相对于传统标准没有那么严格，连续分布的烦恼率模型考虑了人对振动主观反映判断的模糊性，能够将任意振动强度下的烦恼率量化，并用其验证新的振动限值的可靠性，最终由于枢纽结构的跨度大，振动响应明显，但是振动环境较为嘈杂，旅客对其舒适度要求可以适当降低，拟推荐新的振动限值85 dB。

参考文献：

[1] 宋志刚，金伟良. 人对振动主观反应的模糊随机评价模型[J]. **应用基础与工程科学学报**，2002，10(3)：287-294.

[2] 宋志刚. 基于烦恼率模型的工程结构振动舒适度设计新理论[D]. 杭州：浙江大学，2003：3.

[3] 朱鸣，张志强，柯长华，等. 大跨度钢结构楼盖竖向振动舒适度的研究[J]. **建筑结构**，2008，38(1)：72-76.

[4] 谢伟平，洪文林，李霆. 某体育馆楼板振动舒适度研究[J]. **噪声与振动控制**，2010，30(2)：80-83.

[5] XIA H, CAO Y M, ZHANG N. Numerical analysis of vibration effects of metro trains on surrounding environment[J]. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, 2007,7(1): 154-166.

[6] 法永生，李东，孙翠华. 人行桥随机人行荷载下的振动分析及其舒适度评价的新方法[J]. **振动与冲击**，2008，27(1)：119-123.

[7] 杨小丁. 复杂结构人行激励动力响应及舒适度研究[D]. 长沙：中南大学，2012.

[8] 王玲，王浩祺. 单人跳跃荷载模型及其参数取值[J]. **同济大学学报**(自然科学版)，2014(6)：859-866.

[9] SMITH A L, HICKS S J, DEVINE P J. Design of floors for vibration: a new approach, revised edition[S]. Berkshire: The Steel Construction Institute, 2009: 354.

[10] 王玲，陈博，严世鑫. 跳跃荷载动力特性与荷载模型实验研究 [J]. **振动工程学报**，2014(1)：16-24.

[11] 何卫，谢伟平. 基于舒适度评价的大跨度车站结构精细化模型研究[J]. **土木工程学报**，2014(1)：13-23.

[12] 郭朋，屈文俊，熊天齐. 大跨度楼盖结构舒适度评价标准与人行激励研究综述[J]. **结构工程师**，2014(2)：155-163.

[13] 马莉. 大型复杂高架车站动力学响应与减振优化研究[D]. 北京：中国铁道科学研究院，2011.

（上接第93页）

5 结 语

轴向运动连续体的稳态响应求解为工程应用中常见的问题，但考虑带速影响的理论求解方法较少。通过建立带轮跳动激励下运动皮带横向振动运动微分方程，利用简谐激励响应规律与复振幅求解方式结合，得到了横向振动稳态响应的解析解。根据稳态响应解析解的表达式，分析皮带横向振动的幅频、相频特性，得到最大振幅频响特性曲线，并在此基础上分析系统共振特性，求出带速影响下系统共振频率。最后通过工程应用实例，试验验证计算结果，证明求解方法的合理性和有效性。

轴向运动连续体受迫振动稳态响应的理论求解，间接揭示系统特性并指明改进性能的方向，可推广应用于多种轴向运动系统以及进一步设计能有效抑制振动噪声的结构。同时，这些闭合形式的理论解可方便地作为考核如瑞利-立兹法、伽辽金法等数值求解方法有效性和可靠性的算例。

参考文献：

[1] WICKERT J A, MOTE JR C D. Classical vibration analysis of axially moving continua[J]. **Appl Mech**, 57: 738-744.

[2] 严巧赟，丁虎，陈立群. 黏弹性轴向运动变张力梁非线性动力学[J]. **噪声与振动控制**，2013，33(3)：16-20.

[3] 林浩挺. 发动机前端附件驱动系统带横向振动的建模计算与实测分析[D]. 广州：华南理工大学，2013.

[4] 邵文韫，张国策，王志锋. 高速轴向运动梁横向受迫振动的稳态分析[J]. **噪声与振动控制**，2012，32(3)：25-28.

[5] 汤光宋，甘欣荣. 复系数复数方程的求根及复系数常微分方程的通解公式[J]. **江汉大学学报**，1996，13(3)：71-76.

[6] 刘 伟，张劲夫. 黏弹性传动带的分岔特性和混沌振动分析[J]. **动力学与控制学报**，2005，3(3)：63-68.

[7] 刘芳，陈立群，骆毅. 轴向运动弦线横向共振分析[J]. **振动与冲击**，2004，23(3)：99-100.

[8] SINGIRESU S RAO. 机械振动[M]. 北京：清华大学出版社，2016：428-429.