

文章编号:1006-1355(2017)04-0185-03+226

# 一维二组元声子晶体结构参数的传递矩阵法反演研究

张振国<sup>1</sup>, 耿晓雯<sup>2</sup>, 刘英<sup>1</sup>, 张恒<sup>3</sup>

(1. 中原工学院 材料与化工学院, 郑州 450007;  
2. 郑州科技学院 土木建筑工程学院, 郑州 450064;  
3. 郑州大学 材料工程学院, 郑州 450052)

**摘要:**采用声传递理论及传递矩阵研究方法,从反问题角度对无限周期一维二组元声子晶体进行理论研究和方法设计。从结构参数角度进行带隙研究,并进行计算机模拟。结果表明,可以从反演的角度对带隙进行研究,从结构参数角度研究无限周期的带隙,可以设计具有某个频率范围带隙的声子晶体隔声构件,从而为实际应用开辟一条新的途径。

**关键词:**声学;一维二组元声子晶体;声传递理论;反演;计算机模拟;结构参数

中图分类号:TB535

文献标识码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2017.04.036

## Study on Bandgap of One-dimensional and Two-component Phononic Crystal Based on the Inverse Transfer Matrix Method

ZHANG Zhen-guo<sup>1</sup>, GENG Xiao-wen<sup>2</sup>, LIU Ying<sup>1</sup>, ZHANG Heng<sup>3</sup>

(1. College of Material and Chemical Engineering, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China;  
2. College of Civil and Architecture Engineering, Zhengzhou University of Science and Technology, Zhengzhou 450064, China;  
3. College of Material Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** Based on sound transmission theory and transfer matrix method, the infinite periodic one-dimensional and two-component phononic crystals are studied in view of inverse problem. The computer simulations are carried out based on the structural parameters of the phononic crystal. The results show that the bandgap of the infinite periodic crystals can be studied in view of the inverse problem with structure parameters. The one-dimensional and two-component phononic crystal sound isolation components with the bandgap in a certain frequency range can be designed with this method.

**Key words:** acoustics; one-dimensional and two-component phononic crystal; theory of sound transmission; inverse problem; computer simulation; structure parameter

在目前噪声控制的研究中,隔声依然是一个主要的方法,多层板、夹芯复合板等层状复合结构依然是隔声的主要应用手段。截止到目前,对于层状复

合结构能够进行定量分析的波动分析法以及能够进行定性分析的基于声子晶体理论的传递矩阵法,均从正问题角度进行研究<sup>[1-9]</sup>,即已知层状复合结构的材料物理因素(密度、声速、阻抗、刚度等)和结构因素(晶格常数、间距、组分比等),对隔声量和带隙进行研究,目前在理论和应用探索方面均取得较大进展。

然而,工程中最需要的是根据某一个具体的噪声环境进行噪声控制,设计出具有某个频率范围带隙(最大隔声量)的层状复合结构隔声构件。即从反问题角度,从带隙或最大隔声量所对应的频率出发,

收稿日期:2016-08-15

基金项目:河南省科技厅国际科技合作项目(144300510063, 152102410071);河南省教育厅基础研究项目(13A430120)

作者简介:张振国(1969—),男,长春市人,博士,副教授。主要研究方向为声子晶体与噪声控制。

通信作者:耿晓雯,女,郑州市人,硕士,讲师。主要研究方向为建筑材料与噪声控制。

E-mail: zhangzg1969@163.com

设计层状复合结构的物理参数与结构参数。鉴于层状复合结构涉及的物理因素与结构因素参数很多,研究起来比较复杂。因此,可以先固定一些因素,如物理因素,从结构参数的角度进行研究。文中即从这一角度针对该问题进行研究。

## 1 一维二组元声子晶体的模型与仿真计算方法

以一维二组元声子晶体,即由两种材料组成的一维声子晶体的研究为例,设两种不同密度和声速的材料A和B在 $x$ 方向上交替排列,形成一维周期性复合材料结构<sup>[10]</sup>,如图1所示。

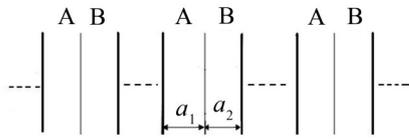


图1 一维二组元声子晶体模型

设该复合材料在各个方向均可无限扩展,没有边界约束。 $a_1$ 和 $a_2$ 分别表示材料A和B在一个原胞周期中的厚度, $a=a_1+a_2$ 为晶格常数,两种材料的密度分别记为 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ ,材料A、B声波纵波速度分别用 $c_1$ 、 $c_2$ 表示。

这里只研究声波垂直入射的情况,波矢 $k$ 与频率 $f$ 之间的色散关系,即能带结构计算公式为

$$\cos(ka) = \cos(k_1 a_1) \cos(k_2 a_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \sin(k_1 a_1) \sin(k_2 a_2)$$

根据上述一维声子晶体能带结构的计算公式,利用matlab编写出相应的计算机程序,可以很方便地完成上述计算,并把计算结果绘制成波矢 $k$ 与频率 $f$ 色散关系图供分析对比。图2为钢和橡胶组成的一维声子晶体型复合材料的能带结构。钢和橡胶的材料常数如下:钢中的声速为5 960 m/s,密度为7 850 kg/m<sup>3</sup>;橡胶中的声速为96 m/s,密度为1 300 kg/m<sup>3</sup>;声子晶体的晶格常数为 $a=4$  mm,组分比例为 $a_1:a_2=1$ 。

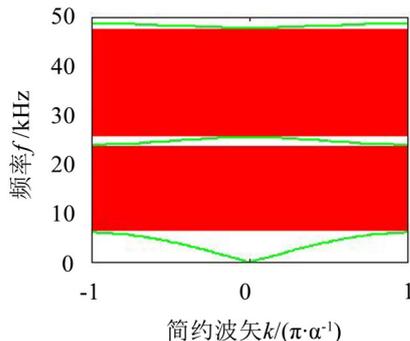


图2 钢与橡胶组成的一维声子晶体的能带结构

## 2 反演理论及公式的分析

已知一维声子晶体的组元材料密度、声速、晶格尺寸和材料组份,采用编制的计算程序,可以很方便地计算出声子晶体的带隙。然而,工程中最需要的是根据某一具体的噪声环境中噪声控制的需要,设计出具有某个频率范围带隙的声子晶体隔声构件。

### 2.1 理论分析

根据计算材料学的基本思路,应用等步长扫描法,给出一个可以把带隙作为已知条件来设计有限周期声子晶体型复合材料具体参数的方法。

已知一维声子晶体声波带隙条件下问题求解可归结为求解方程

$$\cos(ka) = \cos(k_1 a_1) \cos(k_2 a_2) - \frac{1}{2} \left( F + \frac{1}{F} \right) \sin(k_1 a_1) \sin(k_2 a_2)$$

其中  $F = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$ ,  $k_1 = 2\pi f / c_1$ ,  $k_2 = 2\pi f / c_2$ 。

上式中,令

$$\Phi(f) = \cos(2\pi f a_1 / c_1) \cos(2\pi f a_2 / c_2) - \frac{1}{2} \left( F + \frac{1}{F} \right) \sin(2\pi f a_1 / c_1) \sin(2\pi f a_2 / c_2)$$

则上式变成  $\cos(ka) = \Phi(f)$

(1) 对于给定的声子晶体,参数 $c_1$ 、 $\rho_1$ 、 $c_2$ 、 $\rho_2$ 、 $a$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 已知,任给一个 $f$ 值,由此式可计算出 $k$ 值。 $\cos(ka)$ 为余弦函数,值域为 $[-1, 1]$ ,由此必有条件 $|\Phi(f)| \leq 1$ 成立。此时,声波可以传播,频率 $f$ 未在带隙内。

(2) 任给一个 $f$ 值,若有条件 $|\Phi(f)| > 1$ 成立,由于 $\cos(ka)$ 为余弦函数,值域仅为 $[-1, 1]$ ,则解答无意义,声波不可传播, $f$ 在带隙内。

### 2.2 计算方法设计

根据以上理论分析,设计计算方法如下:

(1) 计算目标:给定一个频率 $f_b$ ,设计一种声子晶体型复合材料,使 $f_b$ 在其带隙内。

(2) 计算方案设计:

1) 输入带隙拟包含的频率 $f_b$ ;

2) 输入声子晶体材料常数 $c_1$ 、 $\rho_1$ 、 $c_2$ 、 $\rho_2$ ;

3) 根据声子晶体安装空间尺寸 $L$ ,确定声子晶体周期数 $N$ 和晶胞常数 $a$ 。

$$L = Na$$

4)  $f_b$ 在带隙内的判据。

设材料A厚度为 $x$ ,则材料B厚度为 $a-x$ ,则

$$\cos(ka) = \Phi(f) = \cos(2\pi f x / c_1) \cos(2\pi f (a-x) / c_2) - \frac{1}{2} \left( F + \frac{1}{F} \right) \sin(2\pi f x / c_1) \sin(2\pi f (a-x) / c_2)$$

此时,对于任意一个 $x$ , $x \in [0, a]$ ,由上式的右边可以计算出一个 $\Phi(f_b)$ 的值来。

若 $|\Phi(f_b)| \leq 1$ ,则 $f_b$ 在带通内;

若 $|\Phi(f_b)| > 1$ ,则 $f_b$ 在带隙内。

5) 采用等步长扫描法求满足  $|\Phi(f_b)| > 1$  的  $x$  值 ( $x \in [0, a]$ )

① 输入  $0, a, h$ , 其中  $h$  为步长;

②  $x=0$  时, 计算  $\Phi(f_b)$ , 检验  $|\Phi(f_b)|$  是否大于 1。如果是, 则输出  $x=0$ ;

③ 如果  $|\Phi(f_b)|$  小于 1, 进行下一步计算: 取  $x=0+h$ , 计算  $|\Phi(f_b)|$ , 检验  $|\Phi(f_b)|$  是否大于 1, 如果是, 则输出  $x=0+h$ ;

④ 如果  $|\Phi(f_b)|$  小于 1, 进行下一步计算:  $x=0+2h$ , 计算  $|\Phi(f_b)|$ , 检验  $|\Phi(f_b)|$  是否大于 1, 如果是, 则输出  $x=0+2h$ ;

依此类推。

对于任一步扫描, 检查  $x=0+ih$  是否大于  $a$ 。如果是, 终止扫描。

如果整个数值范围之内都无法输出  $x$  值, 缩小  $h$  值后重新扫描。如果仍然无法输出  $x$  值, 只能更换材料, 重新确定物理参数, 再重新开始扫描计算。

$|\Phi(f_b)|$  小于 1, 说明存在色散关系, 存在相应的 Bloch 波矢与其对应;  $|\Phi(f_b)|$  大于 1, 说明不存在色散关系, 不存在相应的 Bloch 波矢与其对应。而  $|\Phi(f_b)|$  的数值取决于材料 A 的厚度  $x$ , 即研究材料 A 的厚度  $x$  与 Bloch 波矢  $k$  的关系, 即可以确定是否存在带隙。当对应材料 A 的厚度  $x$  存在 Bloch 波矢  $k$  的值时, 说明处于通带范围, 当没有对应的值时, 说明处于带隙频率范围。

### 3 复合材料设计实例

依然以钢和橡胶组成的一维二组元声子晶体型复合材料为例, 来说明怎样用等步长扫描法设计声子晶体的带隙。

如前所述, 二种材料的物理参数均已知。取晶格常数为  $a=4$  mm, 材料 A 钢厚度为  $x$ 。设选择的带隙频率分别为 4 000 Hz 和 7 000 Hz。图 3 和图 4 即为根据上述算法得出的材料 A-钢厚度与 Bloch 波矢关系图。

由图 3 可知, 在材料 A 的厚度范围, 均有相应的 Bloch 波矢与其对应, 即  $|\Phi(f_b)|$  小于 1。因此, 对于晶格常数为  $a=4$  mm 的钢和橡胶声子晶体, 在整个晶格常数可能的范围内, 无法形成带隙。

由图 4 可知, 在材料 A 的厚度范围, 既有相应的 Bloch 波矢与其对应, 也有没有对应的, 即  $|\Phi(f_b)|$  可以小于 1, 也可以大于 1。因此, 对于晶格常数为  $a=4$  mm 的钢和橡胶声子晶体, 在材料 A 厚度为 0.8 mm~2.9 mm 的范围内, 可以在 7 000 Hz 时产生带隙。

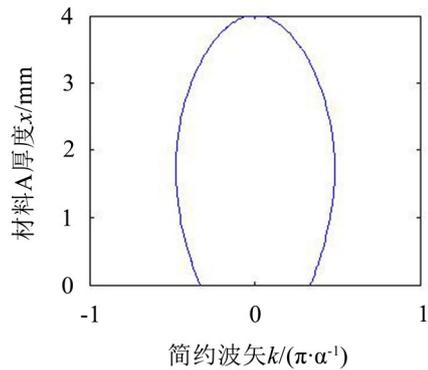


图 3 4 000 Hz 时材料 A 厚度与 Bloch 波矢关系图

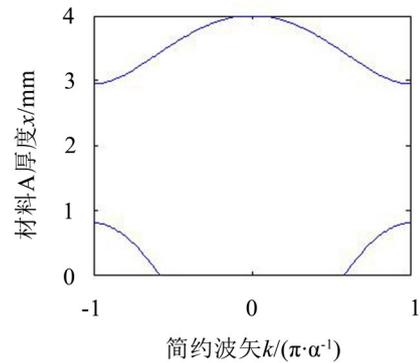


图 4 7 000 Hz 时材料 A 厚度与 Bloch 波矢关系图

## 4 复合材料能带验证

根据图 3 和图 4 可知, 当材料 A 厚度为 1.5 mm、材料 B 厚度为 2.5 mm 时, 在 4 000 Hz 时不会产生带隙, 而在 7 000 Hz 时会产生带隙。

这可以通过无限周期结构传递矩阵法的模拟计算来验证。图 5 为用传递矩阵法计算得到的钢与橡胶组成的无限周期一维声子晶体的能带结构图。由图 5 可知, 在 4 000 Hz 时不会产生带隙, 而在 7 000 Hz 时会产生带隙。

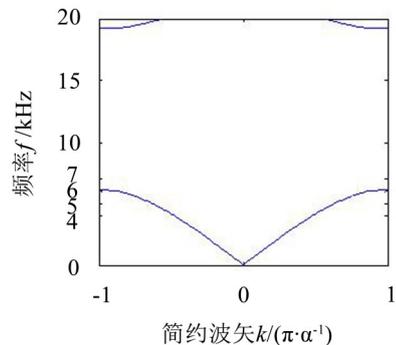


图 5 钢与橡胶组成的一维声子晶体的能带结构

## 5 结语

针对一维二组元声子晶体, 在从正问题角度研究带隙的基础上, 可以从反问题角度对带隙进行研究。

(下转第 226 页)