

文章编号:1006-1355(2017)01-0001-04

高斯激励黏弹性夹层梁的非线性随机响应特性

张四康, 应祖光

(浙江大学 航空航天学院力学系, 杭州 310027)

摘要:黏弹性夹层梁的随机振动控制是一个重要的实际问题。基于性能可控黏弹性体的夹层梁具有无需改变结构设计的可优化性而倍受关注。虽然关于该可控黏弹性夹层梁的振动已有一定研究,但所用的动力学模型在几何或物理上是线性的,而对于较强激励情况则需要考虑非线性因素。首次考虑该黏弹性体的物理非线性,建立黏弹性夹层梁及其支承质量系统的非线性运动微分方程,并离散化为多模态耦合的非线性振动方程;对于平稳随机激励,运用统计线性化法推导等价拟线性系统,并计算系统的随机响应,得到黏弹性夹层梁非线性随机振动的均方位移,及等价的频响函数和功率谱,用以评价可控黏弹性夹层梁的响应抑制性能。

关键词:振动与波;随机振动;非线性复合梁;统计线性化;高斯平稳激励;均方根响应

中图分类号:O324;O328

文献标识码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2017.01.001

Nonlinear Random Response Characteristics of Viscoelastic Sandwich Beams under Gaussian Excitations

ZHANG Si-kang, YING Zu-guang

(Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract : The random vibration control of viscoelastic sandwich beams is an important subject in engineering. The sandwich beams with property-controllable viscoelastic core are concerned since they can be optimized without structural change. There are some publications of studies on vibration responses of the controllable viscoelastic sandwich beams. However, the viscoelastic material dynamics in these studies were described by linear models only. Particularly, the physical nonlinearity of the viscoelastic core needs to be considered for vibration analysis under strong excitations. In this paper, a nonlinear dynamic model is employed for describing the viscoelastic constitutive relation. The differential equations of motion of a viscoelastic sandwich beam with supported mass under stationary random support excitations are derived and converted into nonlinear multi-mode coupling vibration equations by using the Galerkin method. The equivalent quasi-linear system is derived by using the statistic linearization method. The random responses such as MS displacement, the equivalent frequency response function and power spectral density of the nonlinear random vibration are obtained, which are used for evaluating the vibration suppression efficiency of the viscoelastic sandwich beam.

Key words : vibration and wave; random vibration; nonlinear sandwich beam; statistic linearization; Gaussian stationary loading; RMS response

梁是一个典型的工程结构,其随机振动控制是重要的实际问题,采用黏弹性材料构造复合梁是振

动控制的一个有效措施。关于不可控阻尼夹层梁的振动抑制已有很多研究^[1-3]。近年来发展了一种磁控的黏弹性体^[4],其模量或刚度及损耗因子等可通过外加磁场调节。该可控的黏弹性体已用于构造复合梁以抑制振动,它具有无需改变结构设计的可优化性、及对于较宽激励频带的适应性等优点。关于该可控黏弹性夹层梁的频响特性、周期振动响应、随机微振动响应等已有一定研究^[5-10],但所用的动力学模型在几何和物理上都是线性的。然而,当作用

收稿日期:2016-09-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11572279);

浙江省自然科学基金资助项目(LY15A020001)

作者简介:张四康(1992—),男,湖北省仙桃市人,硕士生,主要研究方向为非线性随机振动。

通信作者:应祖光,男,博士生导师。

E-mail: yingzg@zju.edu.cn

力与变形增大时,该黏弹性体首先表现出物理非线性^[1]。因此,对于较强激励下黏弹性夹层梁的振动需要考虑其非线性因素。

高斯随机激励是较为普遍的环境载荷,对于这类宽频带激励需要考虑黏弹性夹层梁的多模态耦合振动,而多自由度(特别是高自由度)非线性系统的随机振动分析仍是目前一个复杂而困难的问题。对于该黏弹性夹层梁的非线性随机外激振动,统计线性化法是目前一个主要而有效的分析方法^[12]。随机振动响应的分析解是评估黏弹性夹层梁振动抑制效果的依据。

本文考虑可控黏弹性体的物理非线性,研究该黏弹性夹层梁在随机支座运动激励下的非线性随机振动响应。先基于黏弹性体的非线性本构关系,按照复合结构理论,建立黏弹性夹层梁及其支承质量系统关于纵横位移的非线性耦合运动微分方程;再根据伽辽金法将该偏微分方程组转化为常微分方程组,得到关于梁横向位移的多自由度非线性振动方程;然后根据随机振动理论,运用统计线性化法推导等价拟线性系统,并计算系统的随机响应,得到黏弹性夹层梁非线性随机振动的均方位移,同时得到等价的频响函数和功率谱;最后给出数值结果,说明可控黏弹性夹层梁的响应抑制性能。

1 非线性黏弹性夹层梁的振动方程

考虑黏弹性夹层梁及其支承集中质量系统,其结构简图如图1所示。梁长为 L ,上下两层是弹性材料,其厚度、弹性模量、密度分别为 h_1 、 E_1 、 ρ_1 ,中间层是可控黏弹性材料(例如剪切模量可由外部磁场调节),其厚度、密度分别为 h_2 、 ρ_2 ,其弹性模量相比弹性层小得多故而不计,剪切模量为 G_2 ,处于任意位置的支承物的单位面积质量为 m 。夹层梁受随机支座运动(垂直位移 w_0)激励,设为高斯平稳过程。

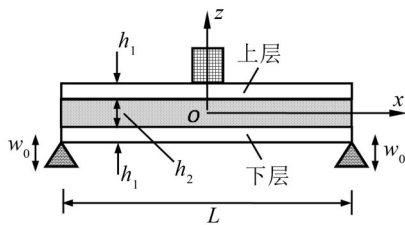


图1 黏弹性夹层梁及质量系统

对于较强振动,考虑黏弹性体的物理非线性,其切应力 τ_2 与切应变 γ_2 的关系表示为^[11]

$$\tau_2 = G_2 \gamma_2 = \sum_{k=1}^3 [G_{2k} \gamma_2^k + G_{ck} (\frac{\partial \gamma_2}{\partial t})^k] \quad (1)$$

式中 G_{2k} 和 G_{ck} 是常数, t 是时间。

根据多层复合结构理论与梁的基本假设,夹层

梁的上、下层中任意点的纵向(x 轴方向)位移 u_1 与 u_3 可分别表示为^[1-3]

$$u_1 = u_{10} - z_1 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_3 = u_{30} - z_3 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

式中 u_{10} 与 u_{30} 分别是上、下层的中性层的纵向(x 轴方向)位移, w 是梁的横向(z 轴方向)位移, x 与 z 坐标如图1所示。由几何关系计算各层中点的纵向正应变,再由物理关系得到相应正应力为

$$\sigma_1 = E_1 (\frac{\partial u_{10}}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}), \quad \sigma_3 = E_1 (\frac{\partial u_{30}}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \quad (3)$$

从而由单元体 x 方向的平衡可计算上下层的切应力 τ_1 和 τ_3 。假设中间黏弹性层的横截面始终保持平面,利用式(2)计算其切应变,再由式(1)得到相应切应力为

$$\tau_2 = \sum_{k=1}^3 [G_{2k} (\frac{u_{10} - u_{30}}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x})^k + G_{ck} (\frac{\dot{u}_{10} - \dot{u}_{30}}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})^k] \quad (4)$$

式中 $h_a = h_1 + h_2$ 。不计相对较小的梁纵向惯性效应。基于夹层梁界面间切应力的连续性,可得关于纵向位移的微分方程

$$E_1 h_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^3 [G_{2k} (\frac{2u}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x})^k + G_{ck} (\frac{2\dot{u}}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})^k] = 0 \quad (5)$$

式中 $u = u_{10} = -u_{30}$ 。再基于夹层梁单元 z 方向的动平衡,可得关于横向位移的运动微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 h_1^3}{6} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - E_1 h_1^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \sum_{k=1}^3 [k G_{2k} \cdot \\ & (\frac{2u}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x})^{k-1} (2 \frac{\partial u}{\partial x} + h_a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + \\ & k G_{ck} (\frac{2\dot{u}}{h_2} + \frac{h_a}{h_2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})^{k-1} (2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + h_a \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2})] + \\ & [\rho h_1 + mL \delta(x - x_0)] (\ddot{w} + \ddot{w}_0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\rho h_1 = 2\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$, x_0 是集中质量的坐标。式(5)和(6)组成夹层梁关于纵横位移的非线性耦合运动微分方程。考虑简支梁,其边界条件为

$$w|_{x=\pm L/2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=\pm L/2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm L/2} = 0 \quad (7)$$

梁纵向与横向振动位移无量纲化的级数解可表达为

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{i=1}^n p_i(t) \sin(2i-1)\pi y \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^n q_i(t) \cos(2i-1)\pi y \end{aligned} \quad (8)$$

式中无量纲坐标与位移分别是 $y = x/L$, $\bar{u} = u/w_a$, $\bar{w} = w/w_a$, w_a 是支座位移激励幅值, p_i 、 q_i 是时间函数。按照伽辽金法,将式(8)代入方程式(5)和式(6),利用函数正交性简化,得到关于 p_i 与 q_i 的方程组,略去高阶小量,消去 p_i 后得到关于 q_i 的常微分方程组,表示成矩阵形式为

$$M\ddot{Q} + [C + C_N(\dot{Q}\dot{Q}^T)]\dot{Q} + [K + K_N(QQ^T)]Q = F(t) \quad (9)$$

式中 $Q=[q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, M 、 C 、 K 分别是广义质量、阻尼和刚度矩阵, C_N 、 K_N 分别是非线性阻尼和刚度矩阵, F 是广义激励向量, 来自式(6)中的惯性力。方程式(9)描述了黏弹性夹层梁的非线性多模态或多自由度系统受随机外激的耦合振动。

2 基于统计线性化的随机振动响应

黏弹性夹层梁在随机支座运动激励下的振动为随机过程。对于受随机外激的多自由度非线性系统式(9), 运用统计线性化法^[12], 设其等价拟线性系统为

$$M\ddot{Q} + (C + C_{eq})\dot{Q} + (K + K_{eq})Q = F(t) \quad (10)$$

式中 C_{eq} 、 K_{eq} 分别是等价线性阻尼和刚度矩阵。根据式(9)与式(10)左边之差的均方极小, 可得关于 C_{eq} 与 K_{eq} 的代数方程组为

$$E[(C_N\dot{Q} + K_N Q)\dot{Q}^T] - C_{eq}E[\dot{Q}\dot{Q}^T] - K_{eq}E[Q\dot{Q}^T] = 0 \quad (11)$$

$$E[(C_N\dot{Q} + K_N Q)Q^T] - C_{eq}E[\dot{Q}Q^T] - K_{eq}E[QQ^T] = 0 \quad (12)$$

式中 $E[\cdot]$ 是期望算子。由式(11)和式(12)解得等价线性阻尼与刚度, 代入式(10)即可确定等价拟线性系统。对于高斯过程, 等价线性阻尼和刚度依赖于系统式(10)的均方响应。由等价线性系统式(10)可得等价的频响函数与响应功率谱密度矩阵分别为

$$H(\omega) = \{K + K_{eq} + j\omega(C + C_{eq}) - \omega^2 M\}^{-1} \quad (13)$$

$$S_Q(\omega) = H(\omega)S_F(\omega)H^*(\omega) \quad (14)$$

式中 ω 是振动频率, S_F 是激励功率谱, $*$ 表示复共轭, j 是虚数单位。再利用式(8)可计算黏弹性夹层梁的频响函数与响应功率谱密度, 由此可进一步计算响应统计量, 例如无量纲均方位移为

$$E[\bar{w}(y)^2] = \Phi(y)^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S_Q(\omega) d\omega \right\} \Phi(y),$$

$$\Phi(y) = [\cos \pi y, \cos 3\pi y, \dots, \cos(2n-1)\pi y]^T \quad (15)$$

考虑随机支座运动激励(无量纲垂直位移 \bar{w}_0), 由高斯白噪声通过微分系统生成, 其平稳功率谱为

$$S_{\bar{w}_0}(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2}{[1 - (\omega/\omega_g)^2]^2 + 4\zeta_g^2(\omega/\omega_g)^2} S_0 \quad (16)$$

式中 ω_g 、 ζ_g 是常数, S_0 是激励强度参数。计算过程如下: 选取均方响应初值, 由式(11)和式(12)求解等价阻尼与刚度, 再由式(13)和式(14)计算等价频响函数与功率谱密度, 然后计算均方响应, 迭代直至收敛, 最后计算得到夹层梁的均方位移。

3 数值结果

选取黏弹性夹层梁及随机激励的参数为: $L=4$ m, $h_1=5$ cm, $h_2=20$ cm, $\rho_1=3\ 000$ kg/m³, $\rho_2=1\ 200$ kg/m³, $m=80$ kg/m², $E_1=10$ GPa, $G_{21}=2.0$ MPa, $G_{23}=0.02$ G_{21} ,

$G_{c1}=0.2$ MPa·s, $G_{c3}=0.02$ G_{c1} , $S_0=1.0$, $\omega_g=23$ rad/s, $\zeta_g=0.3$, $w_a=1$, $x_0=0$, $y=0$ 。按照上述方法计算得到数值结果, 如图2—图4所示。

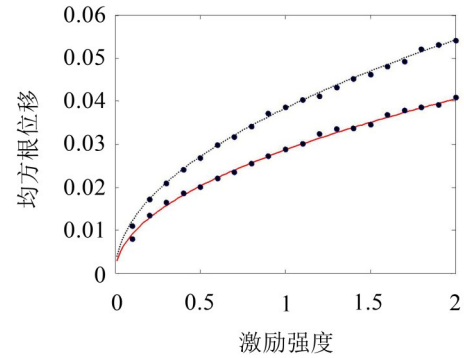


图2 均方根位移($\sqrt{E[\bar{w}^2]}$)随激励强度(S_0)变化(点线:线性振动;实线:非线性振动;点:数值模拟)

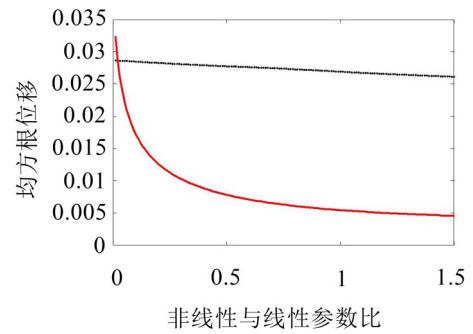


图3 均方根位移($\sqrt{E[\bar{w}^2]}$)随非线性与线性参数比值(G_{23}/G_{21} 或 G_{c3}/G_{c1})变化(点线:变刚度比 G_{23}/G_{21} , $G_{c3}=0.02G_{c1}$; 实线:变阻尼比 G_{c3}/G_{c1} , $G_{23}=0.02G_{21}$)

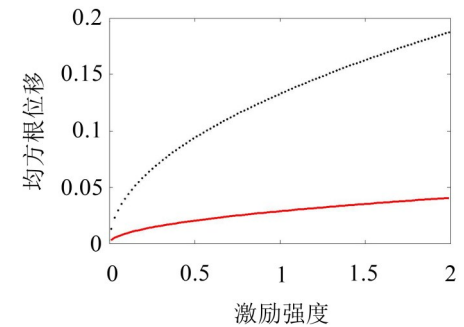


图4 均方根位移($\sqrt{E[\bar{w}^2]}$)随激励强度(S_0)变化(点线:无夹层梁;实线:夹层梁)

图2展示了夹层梁中点的均方根横向位移响应(无量纲)随随机支座垂直运动激励强度(无量纲)的变化, 其中点线为线性振动情形($G_{23}=0$, $G_{c3}=0$)的响应, 实线为非线性振动情形的响应, 离散点为数值模拟结果, 可见数值模拟方法验证了本文的分析方法。比较两条曲线知, 硬非线性刚度($G_{23}>0$)导致黏弹性夹层梁的非线性随机振动响应低于线性振动响应, 这是由于非线性系统刚度大于相应线性系统所致, 而且非线性与线性随机响应之差随激励强度或

振动幅值而增大,因此由于非线性效应实际结构的大振动响应将低于按线性情形计算的结果。

图3展示了夹层梁中点的均方根横向位移响应(无量纲)随非线性与线性参数比值的变化,其中点线为位移响应随非线性与线性刚度比 G_{23}/G_{21} 的变化($G_{c3}=0.02G_{c1}$),实线为位移响应随非线性与线性阻尼比 G_{c3}/G_{c1} 的变化($G_{23}=0.02G_{21}$),可见夹层梁的非线性随机振动响应随非线性刚度或非线性阻尼的增大而减小,当非线性阻尼增加时振动响应非线性地减小,非线性阻尼较小时的一定增加对于响应的降低作用较显著(其他参数相同的情况下)。因此对于一定范围内性能可控的黏弹性材料(例如阻尼与刚度可由外部磁场调节),其夹层梁可无需改变结构设计,仅通过性能控制即可实现非线性随机振动响应降低的优化。

图4展示了夹层梁与无夹层梁中点的均方根横向位移响应(无量纲)随随机支座垂直运动激励强度(无量纲)的变化,其中点线为无中间黏弹性层情形的响应,实线为有中间黏弹性层情形的响应(其中参数如上所述),可见与无夹层梁相比,黏弹性夹层梁能够大大降低支座运动激励产生的非线性随机振动响应。因此黏弹性夹层设计可用于梁等结构受基础激励的非线性随机振动控制,性能可控的黏弹性材料为该夹层结构振动控制提供了不改变结构设计的可优化性、及对于较宽激励频带的适应性。

4 结 语

本文研究了可控黏弹性夹层梁在支座运动激励下的非线性随机振动响应。考虑黏弹性体的物理非线性,建立了黏弹性夹层梁及其支承质量系统关于纵横位移的非线性耦合运动微分方程,根据伽辽金法导出关于梁横向位移的多自由度非线性振动方程。然后运用统计线性化法推导出等价拟线性系统,并计算系统的随机响应,得到了夹层梁非线性随机振动的均方位移、及等价频响函数和功率谱等。最后通过数值结果说明了可控黏弹性夹层梁非线性随机响应的抑制性能、及物理非线性的影响。

参考文献:

- [1] DITARANTO R A. Theory of the vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 881-886.
- [2] MEAD D J, MARKUS S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, 10: 163-175.
- [3] YAN M J, DOWELL E H. Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1972, 94: 1041-1046.
- [4] CARLSON J D, JOLLY M R. MR fluid, foam and elastomer devices[J]. *Mechatronics*, 2000, 10: 555-569.
- [5] ZHOU G Y, WANG Q. Study on the adjustable rigidity of magnetorheological-elastomer-based sandwich beams[J]. *Smart Materials and Structures*, 2006, 15: 59-74.
- [6] CHOI W J, XIONG Y P, SHENOI R A. Vibration characteristics of sandwich beam with steel skins and magnetorheological elastomer cores[J]. *Advances in Structural Engineering*, 2010, 13: 837-847.
- [7] NAYAK B, DWIVEDY S K, MURTHY KSRK. Dynamic analysis of magnetorheological elastomer-based sandwich beam with conductive skins under various boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330: 1837-1859.
- [8] NI Y Q, YING Z G, CHEN Z H. Micro-vibration suppression of equipment supported on a floor incorporating magneto-rheological elastomer core[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330: 4369-4383.
- [9] 应祖光,陈海锋. 磁流变黏弹性夹层板随机下的微振动响应特性[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(19): 6-9.
- [10] 张巍,应墨中,应祖光. MRVE夹层梁随机振动的最优跳变参数控制[J]. *噪声与振动控制*, 2015, 35(4): 121-123.
- [11] YING Z G, NI Y Q, SAJJADI M. Nonlinear dynamic characteristics of magneto-rheological visco-elastomers [J]. *Science China, Technological Sciences*, 2013, 56: 878-883.
- [12] ROBERTS J B, SPANOS P D. Random Vibration and Statistical Linearization[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.