文章编号：1006-1355(2015)06-0031-05+64

多自由度齿轮系统非线性动力学分析

程 欧，苟向锋

（兰州交通大学 机电工程学院，兰州 730070）

摘 要：建立三自由度多间隙齿轮系统耦合振动模型，综合考虑时变啮合刚度、齿侧间隙和轴承纵向响应等非线性特性因素的影响，并采用变步长4～5阶Runge-Kutta法对系统状态方程进行数值求解。构建系统的Poincaré截面，得到系统的位移－时间映像图，通过分析位移－时间映像图，发现系统在支承间隙较小而支承刚度较大时更加稳定；根据分析位移－时间映像图的结论，选择合理的参数，画出系统随频率变化的分岔图，结合相图和Poincaré映射图分析系统的非线性动力学特性，发现系统在不同激励频率下会发生Hopf分岔、倍化分岔和混沌等现象。

关键词：振动与波；非线性动力学；齿轮系统；多间隙耦合；分岔

中文图号分类：TH132.413；O322 **文献标识码**：A DOI编码：10.3969/j.issn.1006-1335.2015.06.007

Nonlinear Dynamics Analysis of a Multi-DOF Gear System

CHENG Ou , GOU Xiang-feng

(School of Mechatronic Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract : A three-DOF multi-gap coupled vibration model of a gear system was established considering the nonlinear properties such as time-varying meshing stiffness, backlash and bearing longitudinal response factors. Then, the system state equation was solved by using 4-5 order Runge-Kutta integration method with variable step size. The bifurcation diagrams, phase portraits and Poincaré maps which describe the system vibration displacement with the change of excitation frequency under different supporting damping and stiffness were obtained. According to the analysis of the displacement-time map of the system, it was concluded that the system is more stable with larger supporting damping and large stiffness. The bifurcation diagram of the system against frequency variation was plotted based on the reasonable selection of the parameters. The Hopf bifurcation, torus tumble bifurcation and chaos phenomena of the system under different excitation frequencies were discussed based on the phase diagrams and Poincaré maps.

Key words : vibration and wave ; nonlinear dynamics ; gear system ; multi-gap coupling ; bifurcation

齿轮系统是各种机器和机械装备中应用最广的动力和运动传递装置，其力学行为和工作性能对整个机器有重要的影响，因此在机械设备中占有重要的地位。在齿轮传动系统中，由于齿侧间隙、综合误差、时变刚度和支承间隙等因素的存在，导致齿轮传动系统成为一个强非线性系统。国内外学者在齿轮系统的非线性动力学方面也做了很多研究。A. Kahraman和R. Singh [1]在考虑滚动轴承的径向间隙、线性时不变轮齿啮合刚度和齿侧间隙等因素，并在提出一个简化的轴承非线性刚度函数时建立了一个3自由度齿轮系统的非线性动力学模型。之后A. Kahraman [2]还建立了包含轴承的3自由度含间隙的齿轮系统模型，该模型在文献[1]的基础上考虑了时变啮合刚度，构成了多间隙的齿轮系统的非线性动力学模型。Cai-Wan Chang-jian等[3, 4]在含时变啮合刚度模型的基础上研究了齿轮系统中含有非线性悬挂和无非线性悬挂模型，利用分形维数和分岔图等方法分析两者的区别。Parey等[5]考虑局部轮齿磨损，建立了一个6自由度的齿轮动力学模型，该模型同时考虑了阻尼、时变啮合刚度、间隙等非线性因素和由误差、轮齿修形等引起的内部激励。Woohyung Kim等[6]考虑齿轮副的平移运动，提出一个新的单级齿轮系统模型，在该模型中，两齿轮的中心距随时间变化，建立了一个单级多自由度的直齿轮系统的非线性动力学模型。王立华等[7]研究了含时变啮合刚度和齿侧间隙等非线性因素的单自由度齿轮系统动力学模型的Poincaré映射。王三民等[8]建立了齿轮－转子－轴承系统的3自由度多间隙耦合的齿轮

收稿日期：2015－04－20

基金项目：国家自然科学基金项目(51365025)

作者简介：程欧(1988－)，男，四川省安岳县人，硕士研究生，研究方向为齿轮非线性动力学。

E-mail: 516804076@qq.com

系统振动模型，并利用数值方法对状态方程进行求解，结合系统的相图、Poincaré截面图和时间历程图等分析系统的动力学特性。苟向锋等[9]在分析考虑齿侧间隙、时变啮合刚度、综合啮合误差和轴承纵向响应时，建立了3自由度单级直齿轮副传动系统的扭转振动非线性动力学模型。杨绍普等[10]利用增量谐波平衡法考虑时变啮合刚度和间隙的直齿轮副非线性动力学模型的解的统一形式，并研究了系统分岔特性、阻尼和外激励幅值对系统幅频特性的影响。杨富春等[11]建立了考虑时变啮合刚度和多齿间隙等非线性因素的8自由度齿轮非线性动力学模型。曹端超等[12]通过改进EMD和HMM方法对齿轮故障进行了诊断和分析。苏林玉等[13]建立了含弹性橡胶片的齿轮振动模型，并用数值方法分析了不同参数对系统动力学特性的影响。魏静等[14]综合考虑齿面间隙、时变啮合刚度、轴承间隙等非线性因素的影响，建立齿轮系统弯－扭－轴－摆耦合的多自由度动力学模型。

上述文献对齿轮系统中的支承间隙和支承刚度的分析很少并且不全面。本文建立了3自由度多间隙齿轮系统耦合振动模型，并以该模型为研究对象，考虑齿轮系统的中心位移和纵向位移，利用数值方法对激励频率变化时的系统动态特性进行研究。

1 力学模型与运动微分方程

图1所示为3自由度单级齿轮传动系统的动力学模型。主动轮1和被动轮2的质量分别为 m_1 和 m_2，其中 I_1 和 I_2 分别为主、从动轮的转动惯量；T_1 和 T_2 分别为主、从动轮上的转矩；F_1 和 F_2 分别为作用在主、从动轴上轴承对齿轮的作用力；θ_1 和 θ_2 分别为主、从动轮的扭转位移；c_1 和 c_2 分别为主、从动轮上的阻尼系数；k_1 和 k_2 分别为主、从动轮上轴承的平均支承刚度；c_h 和 $k_h(t)$ 分别为轮齿啮合的的阻尼系数和时变啮合刚度；$e(t)$ 为齿轮综合误差；y_1 和 y_2 分别为主、从动轮的中心位移；y_3 为轮齿啮合位移函数。

忽略输出扭矩的波动，仅考虑传递误差 $e(t)$ 和输入扭矩波动引起的低频外激励导致的高频内部激励，则

$$T_1(t)=T_{1m}+T_{1a}(t) \tag{1}$$

$$T_2(t)=T_{2m} \tag{2}$$

式中 $T_1(t)$ 为输入扭矩，$T_2(t)$ 为输出扭矩，T_{1m} 为输入扭矩的平均值，T_{2m} 为输出扭矩的平均值，$T_{1a}(t)$ 为输入扭矩的变化部分。

根据牛顿力学定律并引入齿轮副动态相对传递

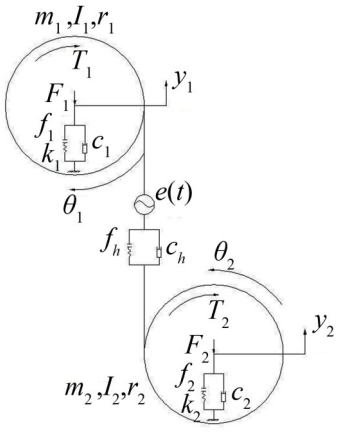


图1 3自由度单级齿轮传动系统的动力学模型

误差 $y_3=r_1\theta_1-r_2\theta_2+y_1-y_2-e$，建立3自由度单级直齿圆柱齿轮传动系统的扭转振动微分方程

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1+c_1\dot{y}_1+c_h\dot{y}_3+k_1f(y_1)+k_h(t)f(y_3)=F_1 \\ m_2\ddot{y}_2+c_2\dot{y}_2+c_h\dot{y}_3+k_2f(y_2)+k_h(t)f(y_3)=F_2 \\ m_e\ddot{y}_3+c_h\dot{y}_3+k_h(t)f(y_3)=F_m-m_e\ddot{e}(t) \end{cases} \tag{3}$$

$$x(t)=r_1\theta_1(t)-r_2\theta_2(t),m_e=1\Big/\left(r_1^2\Big/I_1+r_2^2\Big/I_2\right)$$

$$F_m=T_1/r_1=T_2/r_2$$

$$k_h(t)=k_h(t+2\pi/\omega)=k_{hm}+\sum_{r=1}^{\infty}k_{ha,r}\cos(r\omega t+\varphi_{h,r})$$

其中 $k_h(t)$ 为时变啮合刚度，表示为谐波级数的形式，k_{hm} 为平均啮合刚度，$k_{ha,r}(r=1,2,3,\cdots,\infty)$ 为各谐波分量系数，$\varphi_{h,r}(r=1,2,3,\cdots,\infty)$ 为对应的相位角，ω 为轮齿量纲一啮合频率。

2 非线性动力学特性分析

将方程组(3)转化为状态方程组(4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-f_1-2\zeta_{11}x_2-2\zeta_{13}x_6-k_{11}f_1(x_1)-k_{13}(t)f_h(x_5) \\ \dot{x}_3=x_4 \\ \dot{x}_4=f_2-2\zeta_{22}x_4+2\zeta_{23}x_6-k_{22}f_2(x_3)+k_{23}(t)f_h(x_5) \\ \dot{x}_5=x_6 \\ \dot{x}_6=f_m+f\omega^2\cos(\omega t)+\dot{x}_2-\dot{x}_4-2\zeta_{33}x_6-k_{33}(t)f_h(x_5) \end{cases} \tag{4}$$

其中 x_1、x_3、x_5 分别表示主动齿轮、从动齿轮和齿轮传动相对扭转的量纲一位移，x_2、x_4、x_6 分别表示相应的量纲一速度，$k_{13}(t)=k_{23}(t)=k_{33}(t)/4$，$k_{33}(t)=1-\varepsilon\cos(\omega t)$。齿轮轴承径向间隙和齿轮啮合的非线性位移函数分别为

$$f_i(x_i)\begin{cases} x_i-D_i, x_i>D_i \\ 0 \quad , |x_i|\leqslant D_i \\ x_i-D_i, x_i<D_i \end{cases};(i=1,2) \tag{5}$$

$$f_h(x_5)=\begin{cases} x_5-D, x_5>D \\ 0 \quad , |x_5|\leqslant D \\ x_5+D, x_5<D \end{cases} \tag{6}$$

式中 $D_i\ (i=1,2)$ 为量纲一轴承间隙，D 为量纲一侧隙。

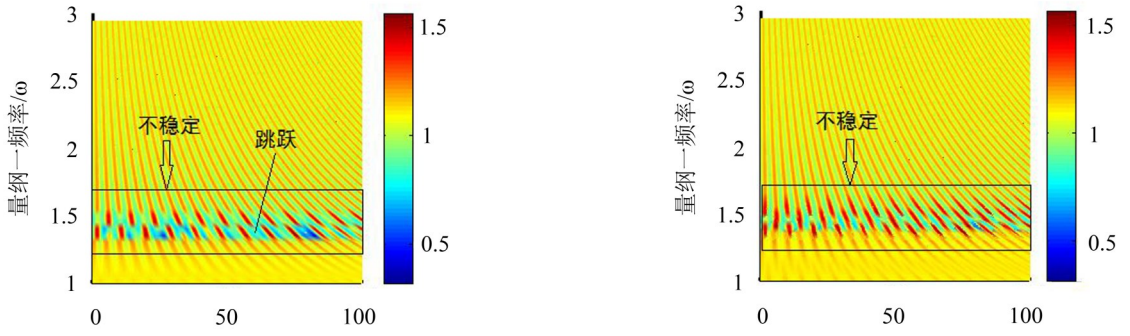
为分析同时变化支承间隙和支承刚度等非线性因素对齿轮系统的影响，采用变步长4～5阶Runge-Kutta法对齿轮动力学状态方程进行数值求解。选取参数为

$f_1=f_2=0.15$，$\zeta_{13}=\zeta_{23}=0.0125$，$f_m=0.1$，$f=0.05$，$\zeta_{33}=0.05$，$\zeta_{11}=\zeta_{22}=0.01$，$D=1$。当支承间隙和支承刚度系数分别为 $D_1=D_2=0.8$，$k_{11}=k_{22}=1.25$ 和 $D_1=D_2=0.2$，$k_{11}=k_{22}=1.5$ 时系统的位移—时间映像图如图2所示。

在位移—时间映像图中，横轴为无量纲时间 t，纵轴为啮合频率 ω，用不同颜色区分齿轮扭转振动位移的大小。通过位移—时间映像图可以分析齿面的运动情况。由图2可知，系统的位移值为正，说明系统没有发生齿背碰撞的现象。图2(a)中随频率的变化，系统的扭转位移出现了小范围的不稳定，并且在 $\omega=1.5$ 附近时扭转位移的值多处小于间隙值，说明在齿轮啮合过程中系统出现了脱啮合现象，系统不稳定。图2(b)中随频率的变化，系统的扭转位移变化不是很明显，在 $\omega=1.5$ 附近时只出现少量的扭转位移值小于间隙值，说明在啮合过程中可能会发生脱啮现象。由图2(a)、(b)的对比分析可知当支承间隙较小而支承刚度较大时系统更加稳定。

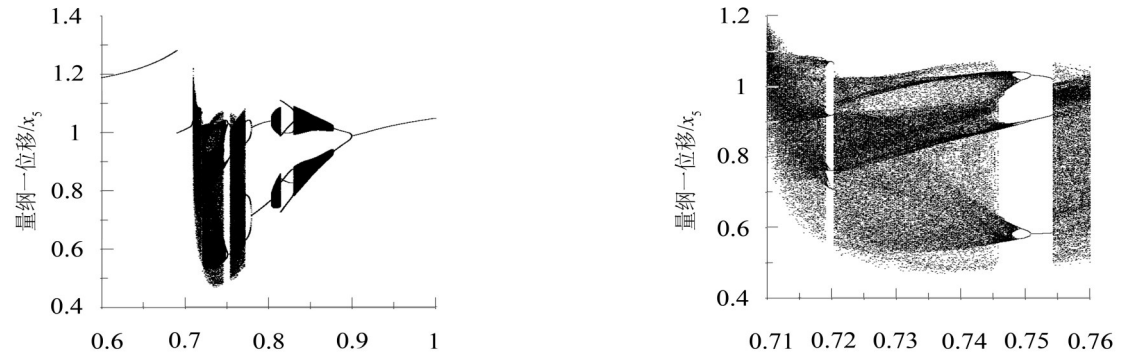
通过上述分析结果可知：由于系统在支承间隙较小而支承刚度较大时更加稳定，进而选择合适的支承间隙和支承刚度，即 $D_1=D_2=0.2$，$k_{11}=k_{22}=1.5$，并画出系统随频率变化的分岔图，如图3所示。

为了进一步研究系统在随频率变化时的动力学特性，图4给出了在不同频率取值处系统的相图和Poincaré映射图。由图4可以看到，当 $\omega=0.95$ 时，系统相图为单条闭合曲线，Poincaré映射图为一个点，系统处于周期1运动(见图4(a))。当 $\omega=0.89$ 时，系统由周期1运动倍化分岔为周期2运动，Poincaré映射图为2个离散点(见图4(b))。当 $\omega=0.875$ 时，系统由周期2运动变为Hopf分岔，Poincaré映射图为2个Hopf吸引不变圈(见图4(c))。当 $\omega=0.835$ 时，系统由混沌运动退化为Hopf运动(见图4(d))。当 $\omega=0.822$ 时，系统由混沌运动变为稳定的周期6运动，Poincaré映射图为6个离散点(见图4 e)。随着频率的减小，系统再次有周期运动进入混沌运动。当 $\omega=0.791$ 时，系统为周期2运动，Poincaré映射图为两个离散点(见图4(f))。当 $\omega=0.776$ 时，系统由周期2运动倍化分岔为周期4运动，Poincaré映射图为4个离散点(见图4(g))。当 $\omega=0.765$ 时，系统由周期运动转化为混沌运动，Poincaré映射图为具有分形结构的离散点(见图4(h))。随着频率的继续减小，在



(a) 量纲一时间/s　　(b) 量纲一时间/s

图2 位移—时间映像图



(a) 量纲一频率/ω　　(b) 量纲一频率/ω

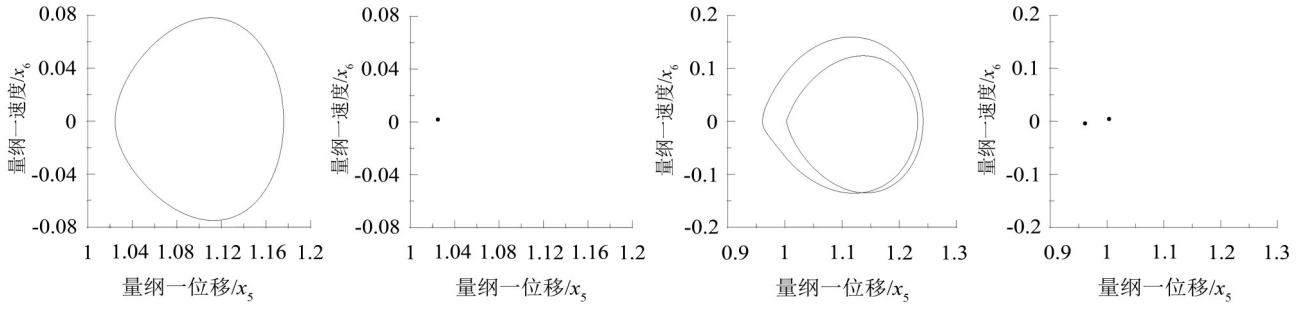
(a) 局部分岔图　　(b) 局部分岔图

图3 系统分岔图

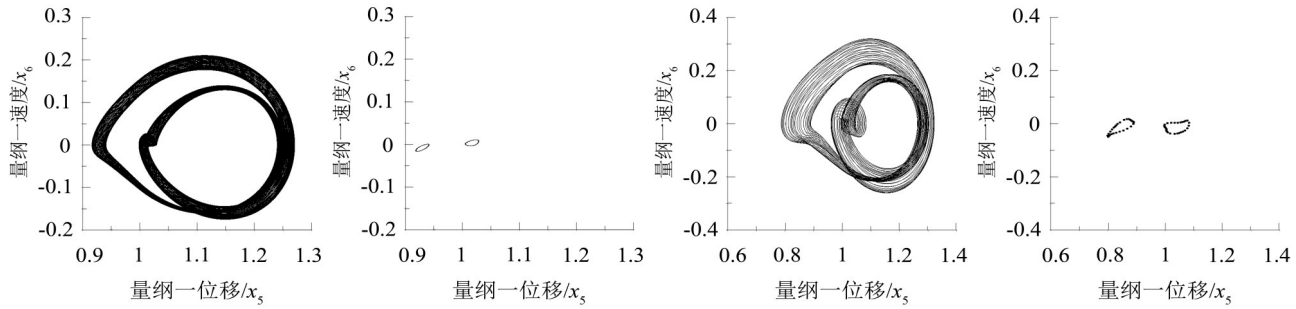
0.71 < ω < 0.76 时，系统多次发生边界激变与倍化分岔，当 ω = 0.754 时，系统发生边界激变由混沌转化为稳定的周期运动，当 ω = 0.752 5 时，系统由混沌转化为稳定的周期3运动，Poincaré映射图为3个离散点(见图4(i))。当 ω = 0.750 1 时，系统由稳定的周期3运动倍化分岔为稳定的周期6运动，Poincaré映射图为6个离散点(见图4(j))。当 ω = 0.73 时，系统处于混沌运动，Poincaré映射图为具有分形结构的离散点(见图4(k))。当 ω = 0.7197 时，系统为稳定的周期6运动，Poincaré映射图为6个离散点(见图4(l))。当 ω = 0.65 时，系统再次由混沌运动转变为周期1运动，相图为单条闭合非圆曲线，Poincaré映射图为一个点(见图4 m)。

3 结 语

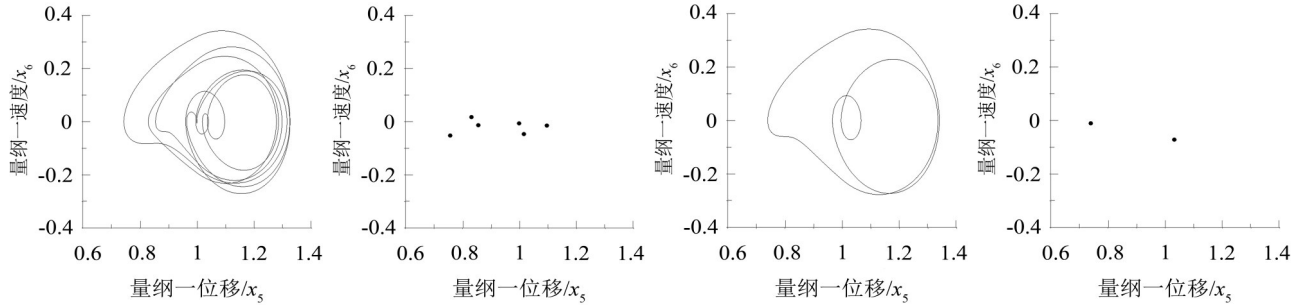
齿轮支承间隙和支承刚度是导致齿轮系统振动的重要因素，也是在齿轮传动系统设计时关注的要点之一。本文建立了3自由度多间隙齿轮系统耦合



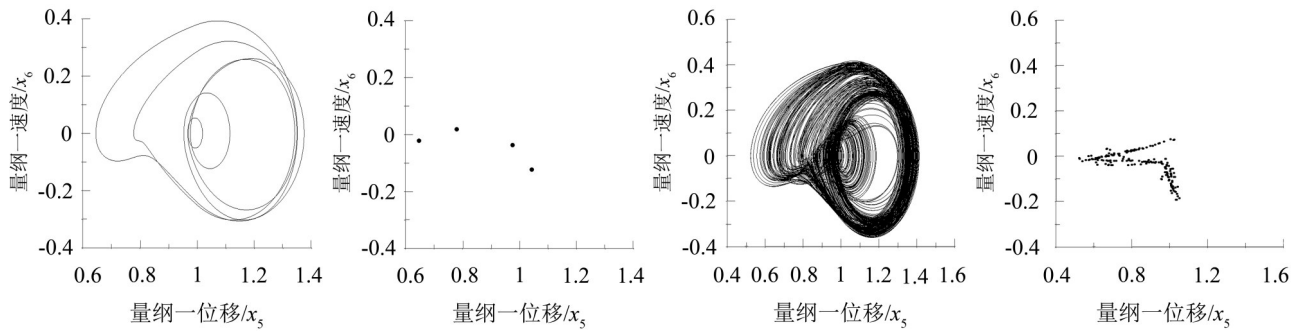
(a) ω = 0.95 时的相图和Poincaré映射图　　(b) ω = 0.89 时的相图和Poincaré映射图



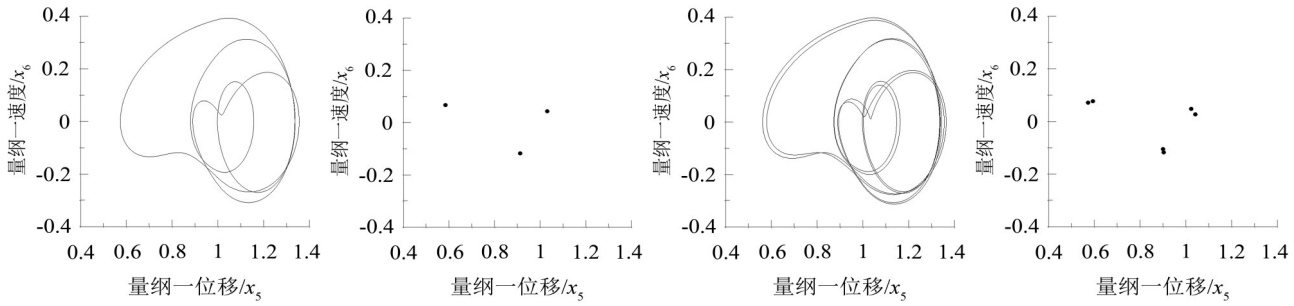
(c) ω = 0.875 时的相图和Poincaré映射图　　(d) ω = 0.835 时的相图和Poincaré映射图



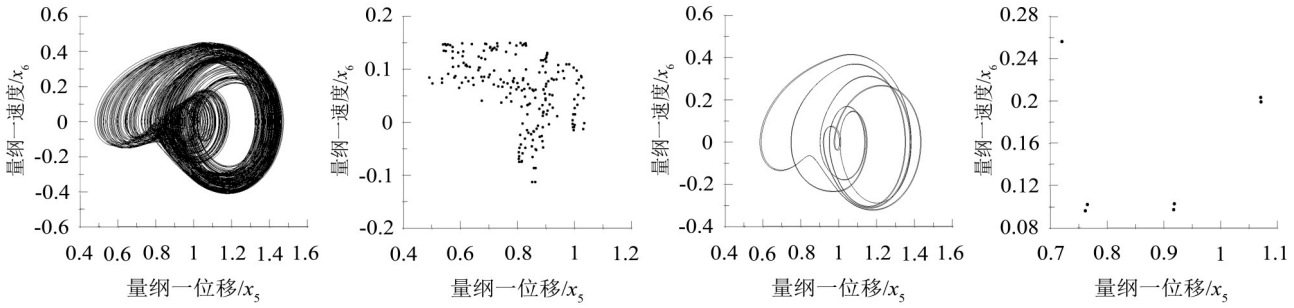
(e) ω = 0.822 时的相图和Poincaré映射图　　(f) ω = 0.791 时的相图和Poincaré映射图



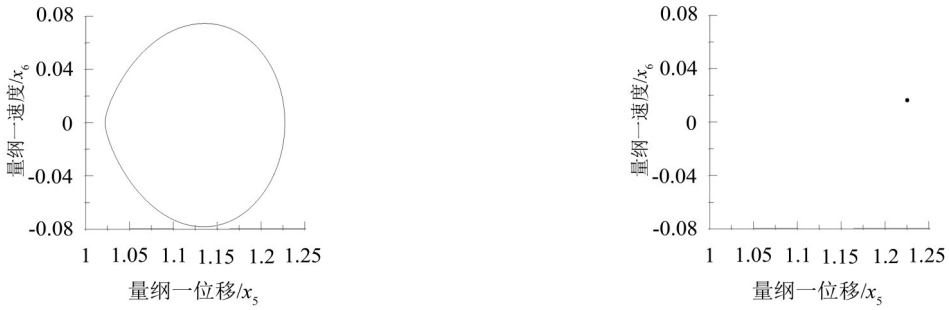
(g) ω = 0.776 时的相图和Poincaré映射图　　(h) ω = 0.765 时的相图和Poincaré映射图



(i) $\omega = 0.7525$ 时的相图和Poincaré映射图　　(j) $\omega = 0.7501$ 时的相图和Poincaré映射图



(k) $\omega = 0.73$ 时的相图和Poincaré映射图　　(l) $\omega = 0.7197$ 时的相图和Poincaré映射图



(m) $\omega = 0.65$ 时的相图和Poincaré映射图

图 4　系统相图及Poincaré映射图

振动模型，采用变步长4—5阶Runge-Kutta法对系统状态方程进行数值求解，并画出系统的时域图和频域图，研究结果表明：

(1) 通过时域分析法表明，系统没有发生齿背碰撞的现象，当支承间隙较小而支承刚度较大时系统的扭转位移变化不是很明显，说明在该情况下齿轮啮合过程更加平稳。

(2) 选择合理的支承间隙和支承刚度，通过频域分析法表明，系统在不同激励频率下会发生Hopf分岔、倍化分岔和混沌等复杂的非线性现象。

研究结果对于工程实际应用中如何选择合理的齿轮参数值来保证齿轮传动的稳定性和减小齿轮在一定的干扰条件下的冲击和振动具有一定的指导意义。

参考文献：

[1] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1991, 144(3): 469-506.

[2] Kahraman A, Blankenship G W. Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1996, 194(3): 317-336.

[3] Chang-Jian C W. Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension—bifurcation and chaos[J]. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 2010, 11(3): 1760-1774.

[4] Chang-Jian C W, Chang S M.Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair with and without nonlinear suspension[J]. **Nonlinear Analysis**, 2011, 12(2): 979-989.

[5] Parey A, El Badaoui M, Guillet F, et al. Dynamic modelling of spur gear pair and application of empirical mode decomposition-based statistical analysis for early detection of localized tooth defect[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 294(3): 547-561.

（下转第64页）