文章编号：1006-1355(2015)06-0013-04

基于Persson接触理论的转子轮盘接触刚度的计算

徐业银[1]，陈照波[1]，焦映厚[1]，姚 嫚[1]，马文生[2]，高 挺[3]

（1.哈尔滨工业大学 机电工程学院，哈尔滨 150001；
2.中航工业沈阳发动机设计研究所，沈阳，110015；
3.中国白城兵器试验中心，吉林 白城，137000）

摘 要：目前对于分布式拉杆转子轮盘接触刚度的研究较多使用的是Hertz接触理论。Hertz接触理论把轮盘间的接触等效为微观微凸体弹性半球之间的接触过于理想化，不能精确地模拟轮盘接触的实际情况；且Hertz接触理论中弹性半球接触角大于30 °时计算结果就会出现很大误差。基于Persson接触理论提出一种新的接触模型，优化了分布式拉杆转子轮盘接触刚度的求解方法。

关键词：振动与波；分布式拉杆转子；理论分析；接触刚度；Persson接触理论

中图分类号：TK47 **文献标识码**：A DOI编码：10.3969/j.issn.1006-1335.2015.06.003

Analysis of Rotor Contact Stiffness Based on Persson's Contact Theory

XU Ye-yin[1], *CHEN Zhao-bo*[1], *JIAO Ying-hou*[1], *YAO Xuan*[1], *MA Wen-sheng*[2], *GAO Ting*[3]

(1. Harbin Institute of Technology School of Mechanics Engineering, Harbin 150001, China;
2. AVIC Shenyang Engine Design Institute, Shenyang 110015, China;
3. Baicheng Ordnance Test Center of China, Baicheng 137000, Jilin China)

Abstract : Most researchers have studied the contact stiffness of rod-fastened rotors by using Hertz contact theory. In this theory, the contact layer is idealized as several spherical bumps with equal radius of curvature against a rigid flat. It is not consistent with the actual situation. Besides, when the contact angles of the asperity exceed 30°, which is very common in real contact condition, the results will include overlarge errors according to the Hertz contact theory. In this paper, a new contact model based on the Persson's contact theory was proposed and used for analyzing the contact stiffness of an RFR. Some accurate results were obtained.

Key words : vibration and wave ; rod-fastened rotors ; theoretical analysis ; contact stiffness ; Persson's contact theory

重型燃气轮机作为军民两用高科技产品、能源工业发展的重大核心装备，广泛应用于航空、舰船、发电和化工等领域。分布式拉杆转子系统是重燃气轮机的主要组成部分，也是关键部分。对于分布式拉杆转子轮盘接触刚度的研究，国内学者使用较多的是Hertz接触理论[1]。Hertz接触理论在轮盘表面微凸体发生小变形（接触区域圆心角小于30 °）的情况下能够得到较为准确的解；但是当转子轮盘表面微凸体接触区迅速扩大，接触区域圆心角接近或超过30 °时Hertz接触理论所得出的结论就会偏离实验数据，不再适用。本文应用一种新的接触理论－Persson接触理论[2, 3]，解决了在微凸体大变形情况下轮盘接触刚度的求解问题。

收稿日期：2015－01－04
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11272100）
作者简介：徐业银，江苏泗阳县人，硕士研究生。主要研究方向：转子动力学。
E-mail: xuyeyin87@126.com
通讯作者：陈照波，男，博士生导师。
E-mail: chenzb@hit.edu.cn

1 单个微凸体接触刚度计算

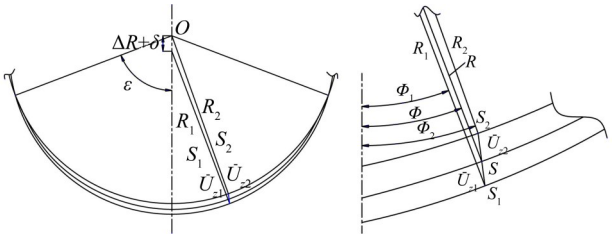
1.1 单个微凸体接触刚度计算

Persson接触理论假设：

（1）忽略接触区径向位移和切向位移的相互作用；

（2）接触区的径向位移和法向最大变形量的关系满足刚体接触几何条件。

图1为Persson接触理论几何示意图。令变形前两表面上对应点为 $S_1(R_1,\phi_1)$ 和 $S_2(R_2,\phi_2)$，式中定义 R_1 和 R_2 为相对主曲率半径，我们取凸曲面的曲率半径为正，并用负号描述凹曲率，且 $R^{-1}=R_1^{-1}+R_2^{-1}$，如果物体没有变形，则他们的轮廓将如图虚线所示那样重叠起来。



（a）（b）

图1 Persson接触理论几何示意图

如果变形后 S_1 和 S_2 在接触面内重合，则有

$$(R_2+\bar{u}_{z2})-(R_1+\bar{u}_{z1})=(\Delta R+\delta)\cos\phi \tag{1}$$

整理后可得

$$\bar{u}_{z2}-\bar{u}_{z1}=\delta\cos\phi-\Delta R(1-\cos\phi) \tag{2}$$

引入无量纲载荷参数 $E_1^*\Delta R/Q$、第一材料参数 $\eta=E_1^*/E_2^*$、第二材料参数 $\lambda=(1-\upsilon_1^*)-\eta(1-\upsilon_2^*)$，其中 E_1^*、E_2^*、υ_1^* 和 υ_2^* 分别为修正的弹性模量和泊松比。并且定义如下的近似变量

$$y=\tan(\phi/2),b=\tan(\varepsilon/2)$$

$$k=\frac{\pi}{2}\frac{2(1+\eta)-\lambda}{1+\eta},\alpha=\frac{1-\eta}{1+\eta},\beta=\frac{\lambda}{2(1+\eta)}$$

根据弹性力学和平衡条件就可以得出

$$\frac{E^*\Delta R}{p}=\frac{(\alpha-1)[\ln(b^2+1)+2b^4]+2}{\pi(1+\alpha)}-\frac{4\beta}{\pi(1+\alpha)} \tag{3}$$

如果两种材料相同，即 $\alpha=0,\beta=0$，则：

$$\frac{E^*\Delta R}{p}=\frac{2-[\ln(b^2+1)+2b^4]}{\pi(1+b^2)b^2} \tag{4}$$

由于物体相互协调接触，可得接触压缩量与接触弧之间的关系

$$\cos(\varepsilon)=\frac{\Delta R}{\Delta R+\delta}$$

代入式（4）可得

$$p=\frac{\pi E^*\Delta R(\frac{\delta}{2\Delta R+\delta}+1)\frac{\delta}{2\Delta R+\delta}}{2-[\ln(\frac{\delta}{2\Delta R+\delta}+1)+2(\frac{\delta}{2\Delta R+\delta})^2]} \tag{5}$$

由于式（5）过于复杂，对其求导以及后续计算比较困难，现对其进行如下化简。

首先对分母中的对数进行多项式替代，得

$$p=\frac{2\pi E^*\Delta R\delta(\Delta R+\delta)}{4\Delta R^2+2\Delta R\delta-3\delta^2} \tag{6}$$

令 $Y(\delta)=\dfrac{\delta(\Delta R+\delta)}{4\Delta R^2+2\Delta R\delta-3\delta^2}$，对其进行多项式拟合，整理得出微凸体顶部球体接触压力公式为

$$P=2\pi E^*\Delta R(b\delta^2+c\delta) \tag{7}$$

1.2 基于Persson接触理论的接触模型

对于分布式拉杆转子轮盘接触面间的接触，从微观角度来看就是由无数多个微观的微凸体在发生接触。工程上通常使用接触表面的统计学参数来表征接触面的接触情况。这是经过大多数工程表面的测试得出的结果，因此本文计算采用正态分布理论分析接触面上的微凸体分布，分布函数为

$$\phi(z)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 σ 是微凸体分布的标准差，μ 是微凸体分布的期望值。

基于Persson接触理论，提出一种新的接触模型：此接触模型中把轮盘面间的接触等效为一个具有一定个数刚性微凸体层与一个弹性平面之间的接触，如图（2）所示。

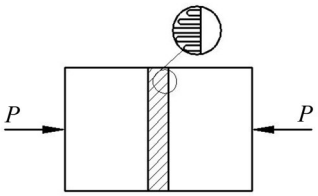


图2 转子轮盘接触层等效示意图

当轮盘上的长螺栓组总的预紧力为 P 时，轮盘面间总的接触载荷也就等于长螺栓组的总拉紧力，根据上述推导的轮盘接触面间的接触载荷为

$$P=2\pi NE^*R\int_{h'}^{\infty}(b^*\delta^2+c^*\delta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}\mathrm{d}h \tag{8}$$

式中 N 为接触面微凸体数目，R 为刚性半球半径，h' 为拉紧力作用下发生接触微凸体高度，$\delta=h-h'$。

当轮盘总的名义接触面积为 A_{nom} 时，$N=\rho A_{nom}$，ρ 为轮盘上微凸体分布密度。

此时，式（8）接触压力可以表示成

$$P=2\pi\rho A_{nom}E^*R\int_{h'}^{\infty}(b^*\delta^2+c^*\delta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}\mathrm{d}h \tag{9}$$

上式等号两边同除以 A_{nom}，可以得出单位名义接触面积上的应力

$$P_c=2\pi\rho E^*R\int_{h'}^{\infty}(b^*\delta^2+c^*\delta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}\mathrm{d}h \tag{10}$$

由单位名义接触面积上的接触应力计算公式（10）可以得出轮盘总拉紧力随着接触间距变化曲线，如图3所示。

由图可以看出虽然在整个轮盘间隙范围内 P_c 随 δ 的变化呈非线性变化，但是当长螺杆的预紧力为某一特定值的时候，即 δ 在某一特定值周围变化时，P_c 随 δ 的变化可以近似认为是线性的。

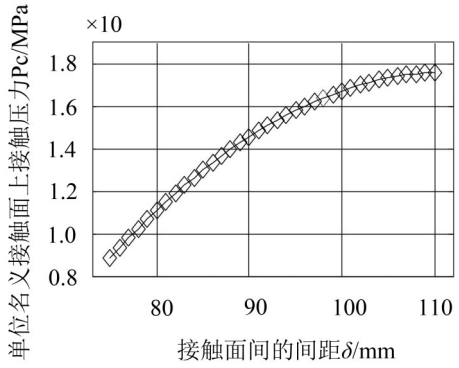


图 3　单位名义接触面积上的接触刚度变化

对于分布式拉杆转子轮盘接触层，可以把接触层等效为均布弹簧，这个均布弹簧的刚度即为 P_c，对 δ 求导，有

$$k_c=-\frac{\mathrm{d}P_c}{\mathrm{d}\delta}=\sqrt{2\pi}\rho E^*R\int_{h'}^{\infty}(2b^*\delta+c^*)e^{-\frac{h^2}{2}}\mathrm{d}h \quad (11)$$

若已知长螺杆的预紧力以及轮盘表面的接触参数，则可根据式(11)解出相应的轮盘接触层的接触刚度。

1.3　轮盘接触层等效接触刚度公式

对于一个给定的接触表面，名义接触面上单位接触面积的接触刚度 k_c 是名义接触压力 P 的函数。而接触面等效接触刚度 K_{fc} 可以表示为 $K_{fc}=\iint_A k_c y^2 dA$，这里 A 是接触面上的接触面积。

图4为转子轮盘部件的示意图，令转子轮盘中性面上触层的厚度为 d_0，其他部位的厚度为 $d=d_0+y\theta$。

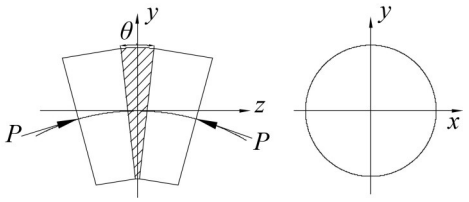


图 4　转子轮盘弯曲示意图

记 $\tau=y/R$，则上式可以表示为

$$K_{fc}=\int_{-1}^{1}\int_{d_0+\tau R\theta}^{\infty}q(z,\tau)e^{-\frac{z^2}{2}}\tau^2\sqrt{1-\tau^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau \quad (12)$$

其中

$$q(z,\tau)=\frac{2}{\sigma}\sqrt{2\pi}\rho E^*R^4[2b(z-d_0-\tau R\theta)+c]$$

2　转子轮盘接触面等效接触刚度计算

等效接触刚度公式(12)表明，分布式拉杆转子轮盘间的等效接触刚度是转子拉杆的总拉紧力和轮盘倾角的非线性函数。本文通过数值法求解转子轮盘间的等效接触刚度，分析轮盘间等效接触刚度随总拉紧力和倾角变化的规律。

以通用电气F级PG 9351(FA)周向拉杆转子燃气轮机的压气机轮盘为例，研究转子轮盘间等效接触刚度随总拉紧力的变化规律。压气机转子通用轮盘盘面呈环面，环面上均布8个螺栓孔。轮盘示意图如图5所示，轮盘尺寸如表1所示。

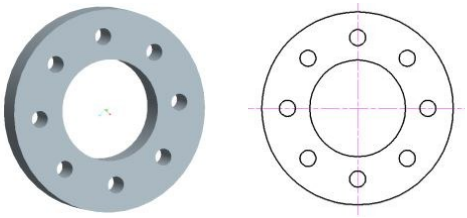


图 5　转子典型轮盘简化示意图

表 1　简化转子轮盘参数表

名称	值	单位
内环直径	60	mm
外环直径	120	mm
拉杆孔直径	15	mm
轮盘厚度	10	mm

由于螺栓孔的尺寸和轮盘面的尺寸相比非常小，故在计算过程中忽略螺栓孔面积的影响[4]。本文中轮盘面的粗糙度参数，可以根据文献[5]中的实验统计参数来定。本文轮盘表面粗糙度参数参照文献[4]确定。文献[4]中使用一种表面形貌测量仪(Surface Test Sj-201P)，根据国际标准 428-1997 完成测试统计。测试的粗糙度参数如表2。

表 2　转子轮盘粗糙度统计学参数

名称	值	单位
微凸体半径	11.785	μm
微凸体分布密度	7.15×10^8	$1/m^2$
微凸体分布标准差	1.57	μm

轮盘拉杆总拉紧力、轮盘倾角以及接触面分离尺寸等非线性参数是轮盘等效接触刚度的主要影响因素。由于转子实际工作过程中轮盘发生分离的情况较少，本文分析中未考虑轮盘面分离状态。分析轮盘接触刚度随拉杆总拉紧力变化的趋势时，分别取接触面倾角 $\theta=1\times10^{-7}$ rad 和 $\theta=1\times10^{-2}$ rad。

图6为转子轮盘等效接触刚度随拉杆受到的总拉紧力的变化规律。等效接触刚度的总体变化趋势随着拉杆总拉紧力增加而增加。当拉杆的总拉紧力相对较小(<3×10^6 N)时，等效接触刚度增加比较快，

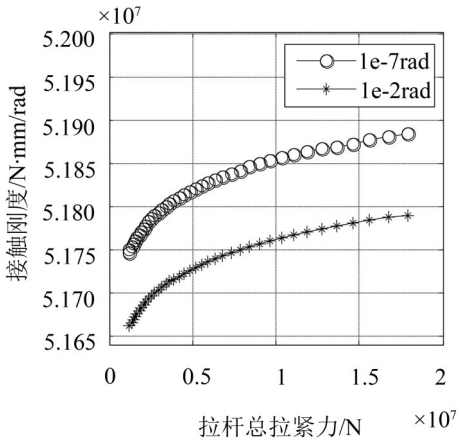
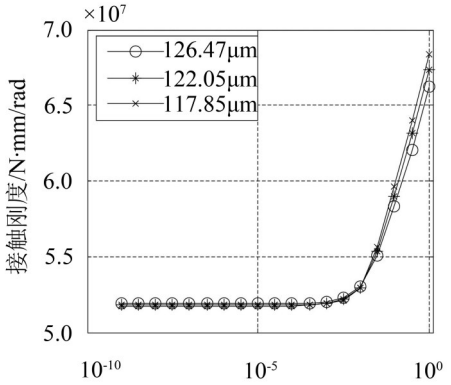


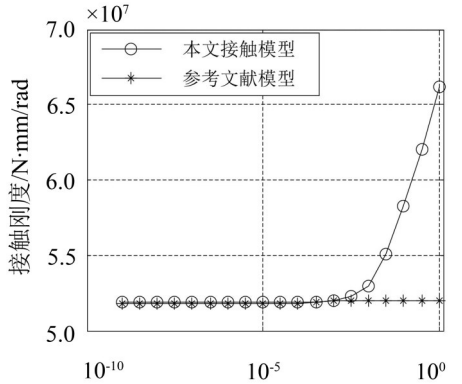
图 6 等效弯曲刚度随拉杆总拉紧力变化图

且近似呈线性增长；随着拉杆总拉紧力继续增加(>3×10^6N)，等效接触刚度的增加趋势趋于平缓。

图7是转子轮盘等效接触刚度随轮盘倾角的变化规律。由图7(a)可以看出，在轮盘倾角较小(<10^{-2}rad)的时候，轮盘的等效接触刚度几乎为定值5.2×10^7N·mm/rad，当轮盘倾角较大(>10^{-2}rad)时，轮盘等效接触刚度随着轮盘倾角近似呈指数形式增长。



(a) 转子轮盘倾角/rad



(b) 转子轮盘倾角/rad

图 7 轮盘接触刚度随轮盘倾角变化图

将基于Persson接触理论的基础模型与基于Hertz基础理论的接触模型作对比，如图7(b)所示。从图中可以看出，当轮盘倾角较大(>10^{-2} rad)时，Persson接触模型对轮盘倾角的变化更为敏感。

3 结 语

分布式拉杆转子轮盘等效接触刚度是影响整个转子系统的重要因素。本文从微观角度出发，建立基于Persson接触理论的转子轮盘等效接触刚度求解模型。对于此模型，通过求解计算可得：

（1）转子轮盘等效接触刚度随拉紧力变化规律为：轮盘倾角一定时，转子轮盘等效接触刚度随拉杆拉紧力增加而增加；拉杆拉紧力较小时，轮盘等效接触刚度随拉紧力增长较快，且近似呈线性增长；拉杆拉紧力较大时，等效接触刚度随拉紧力增长较缓慢；

（2）转子轮盘等效接触刚度随轮盘倾角变化规律为：当轮盘倾角非常小时，基于Persson理论的模型和Hertz接触模型计算所得结果相似；当转子轮盘倾角较大时，轮盘等效接触刚度随着轮盘倾角增长较快，近似呈指数形式增长；

（3）与Hertz接触模型相比，基于Persson接触理论的接触模型在转子轮盘倾角较大，轮盘上微凸体发生较大变形时对轮盘倾角变化较为敏感。

综上，对于分布式拉杆转子系统，当拉杆总拉紧力较大，轮盘上微凸体变形较大时基于Persson接触理论的接触模型可以获得比Hertz接触模型更加精确的结果。

参考文献：

[1] 葛世荣. 摩擦学导论[M]. 北京：机械工业出版社，2007. 292-297.

[2] Persson B. Contact mechanics for randomly rough surfaces [J]. **Surface Science Reports,** 2006, 61(4): 201-227.

[3] Persson B. On the elastic energy and stress correlation in the contact between elastic solids with randomly rough surfaces[J]. **Journal of Physics, Condensed Matter,** 2008, 20(31).

[4] 王俊. 重型燃机压气机轮盘冷加工方法[J]. **机械工程师**，2013，5：175-176.

[5] Jin Gao, Qi Yuan, Zheng Feng. Contact mechanics for randomly rough surfaces in Rod fastened Rotors[J]. **Journal of Engineering for Gas Turbines Power,** 2012, 102503(1)-102503(8).