文章编号：1006-1355(2015)04-0121-03

# MRVE夹层梁随机振动的最优跳变参数控制

张 巍[1]，应婴中[2]，应祖光[3]

（1. 浙江理工大学 经济管理学院实验中心，杭州 310018；
2. 浙江大学 竺可桢学院，杭州 310058；
3. 浙江大学 航空航天学院力学系，杭州 310027）

**摘 要**：研究MRVE夹层梁随机振动的最优参数控制。建立夹层梁的运动微分方程，运用伽辽金法转化为含非线性参数控制项的振动方程；考虑控制参数的有界性，建立系统最优参数控制问题，应用随机动态规划原理与Bang-Bang策略确定HJB方程并得到最优有界非线性跳变参数控制律，最后通过数值结果说明该最优控制对于MRVE夹层梁随机振动能够达到显著控制效果。

**关键词**：振动与波；最优控制；有界参数控制；随机振动；MRVE夹层梁

**中图分类号**：O32；TB53 **文献标识码**：A DOI编码：10.3969/j.issn.1006-1335.2015.04.027

# Optimal Switch Parameter Control of Random Vibration of MRVE Sandwich Beams

*ZHANG Wei*[1], *YING Zhao-zhong*[2], *YING Zu-guang*[3]

(1. Laboratory Center, School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. Chu Kochen Honors College, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;
3. Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract :** The optimal parameter control of random vibration of an MRVE sandwich beam was studied. The kinematic differential equations of the sandwich beam were derived and converted into the vibration equations with nonlinear parameter governing terms by using the Galerkin method. Considering the boundedness of the control parameters, the optimal parameter control method of the system was proposed. Then, the HJB equation was determined and the optimal bounded nonlinear-switch-parameter control law was obtained based on the random dynamical programming principle and Bang-Bang strategy. Numerical results show that the proposed control method can achieve remarkable effectiveness for the random vibration of the MRVE sandwich beam.

**Key words :** vibration and wave ; optimal control ; bounded parameter control ; random vibration ; MRVE sandwich beam

磁流变粘弹性体(MRVE)是近年来发展的一种新型智能材料，它是磁流变液、硅胶等化合而成的磁性高聚物，其性能包括刚度与阻尼可通过外加磁场控制[1]，且具有快速可逆转换、性能稳定等优点，适合于复合结构智能化控制设计。梁的随机振动控制是一个典型而普遍的重要工程问题，可控的MRVE夹层梁是以往不可控阻尼夹层梁的发展。关于MRVE夹层梁的动刚度、频响特性、微振动抑制等已有研究[2-4]，但这些研究都限于被动控制，为充分发挥MRVE性能、进一步改善控制效果，需要研究半主动控制。基于动态规划原理的最优控制可以达到最佳效果，但MRVE夹层梁的控制量是一个系统参数例如刚度，它不同于传统的外作用控制问题，LQG等控制策略已不再适用，因此需要发展新的参数控制策略。

MRVE夹层梁最优控制的动态规划(HJB)方程，

收稿日期：2014－12－02
基金项目：国家自然科学基金项目（11072215）；
浙江省自然科学基金项目（LY15A020001）
作者简介：张巍（1965－），女，江苏南通人，高级工程师，学士，主要从事信息系统与控制研究。
E-mail: zhweihz@zstu.edu.cn

因参数控制而难以得到其连续通解、确定参数反馈律。考虑到控制参数的有界性，Bang-Bang控制是一个简单有效的策略[5, 6]，本文将基于随机动态规划原理与Bang-Bang策略发展新的最优跳变参数控制方法。先建立MRVE夹层梁的运动微分方程，用伽辽金法转化为参数控制方程，给出相应的性能指标；再推导其动态规划方程，结合参数的界限，确定最优函数反馈律与最优跳变参数控制律；最后通过数值结果说明控制效果。

## 1 MRVE夹层梁随机振动的最优控制问题方程

考虑水平简支的MRVE夹层梁，受支座垂直运动激励，其运动微分方程为[4]

$$\frac{E_1h_1^3}{6}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-G_ch_aL^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-E_1h_1^2L\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-2G_cL^3\frac{\partial v}{\partial y}+L^4[\rho h_t+m\delta(y)](\ddot{w}+\ddot{w}_0)=0 \tag{1}$$

$$E_1h_1h_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2G_cL^2v-G_ch_aL\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{2}$$

式中$w$、$v$是无量纲垂直与水平位移，$w_0$是支座位移，$y$是无量纲水平坐标，$L$是梁长度，$h_1$、$h_2$是面层与芯层厚度，$h_a=h_1+h_2$，$h_t=2h_1+h_2$，$\rho h_t=2\rho_1h_1+\rho_2h_2$，$\rho_1$、$\rho_2$是面层与芯层密度，$m$是梁中点支承物的单位面积质量，$E_1$是面层弹性模量，$G_c$是芯层MRVE的剪切模量。$G_c$是可控参数，其值取决于外加磁场。采用Kelvin-Voigt模型描述MRVE的动力学特性，确定$G_c$。对于简支梁，将位移按谐波函数展开，用伽辽金法转化(1)—(2)为常微分方程，消去水平位移分量，可得第$k$阶垂向模态振动方程

$$\ddot{q}+c_0\dot{q}+k_0q+B_0g(G)(q+\beta\dot{q})=\sigma W(t) \tag{3}$$

式中$q$是模态位移，$W$是模态激励，设为高斯白噪声，$c_0$是线性阻尼系数，$\beta$是MRVE的阻尼系数，其它参数如下

$$k_0=\frac{(2k-1)^4\pi^4E_1h_1^3}{6\rho h_tL^4(1+2m/\rho h_t)},\quad B_0=\frac{(2k-1)^4\pi^4E_1h_1h_a^2}{\rho h_tL^4(1+2m/\rho h_t)},$$
$$\sigma=\frac{1}{1+2m/\rho h_t}\left[\frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}-\frac{2m}{\rho h_t}\right],\quad g(G)=\frac{G}{2G+\alpha},\ \alpha=(2k-1)^2\pi^2E_1h_1h_2/L^2 \tag{4}$$

其中$G$是MRVE的可控模量，由磁场决定的范围为$G_1\le G\le G_2$。因控制量$G$是方程(3)的非线性刚度与阻尼参数，故MRVE夹层梁不同于通常的外加控制问题。转化式(3)为状态方程

$$\dot{Z}=AZ-Bg(G)+eW(t) \tag{5}$$

式中$\boldsymbol{Z}=[q\ \ \dot{q}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{e}$是相应的系数矩阵与向量。系统(5)随机最优控制的性能指标为

$$J=E\left[\int_0^{t_f}f\{\boldsymbol{Z}(t)\}\mathrm{d}t+\Psi\{Z(t_f)\}\right] \tag{6}$$

式中$E[\cdot]$是期望算符，$t_f$是控制的终时，$f(\boldsymbol{Z})\ge0$，$\Psi$是控制终值。式(5)与(6)组成MRVE夹层梁随机振动的最优有界非线性参数控制问题，通常的LQG控制已不适用，因此将基于随机动态规划原理及Bang-Bang策略提出新的相应控制方法。

## 2 最优有界跳变参数控制律

根据随机动态规划原理，建立系统(5)和指标(6)的HJB方程[7]

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_G\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(ee^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2V}{\partial Z^2}\right)+[AZ-Bg(G)]^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial Z}+f(Z)\right\}=0 \tag{7}$$

式中$V$是值函数。考虑到控制量$G$的有界性，由式(7)左边第二项泛函极小，按Bang-Bang策略可得函数$g$的最优反馈律

$$g^*(G^*)=\begin{cases}g_2 & B^{\mathrm{T}}\partial V/\partial Z>0\\ g_1 & B^{\mathrm{T}}\partial V/\partial Z\le0\end{cases} \tag{8}$$

式中$g_2$、$g_1$是函数$g$的上下限。再由$g^*$的反函数，得到最优跳变参数控制律

$$G^*=\begin{cases}G_2 & B^{\mathrm{T}}\partial V/\partial Z>0\\ G_1 & B^{\mathrm{T}}\partial V/\partial Z\le0\end{cases} \tag{9}$$

将式(9)代入(7)得到关于$V$的方程，由此确定最优控制$G^*$的跳变条件。对于二次型函数$f$，存在相应的值函数平稳解，即

$$f(Z)=Z^{\mathrm{T}}SZ,\quad V(Z)=Z^{\mathrm{T}}PZ \tag{10}$$

式中$\boldsymbol{S}$是半正定对称矩阵，对称常数阵$\boldsymbol{P}$由下列Lyapunov型方程确定

$$\boldsymbol{S}+A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}A-g^*(D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}D)=0,\quad D=B_0\begin{bmatrix}0&0\\1&\beta\end{bmatrix} \tag{11}$$

控制(9)按条件最优地跳变，达到其界限，实现控制参数的最大最优调节，因此是一种有界非线性参数的最优跳变控制，可用于智能结构等系统随机振动的最优参数控制问题。将式(10)和(11)代入(9)得到最优跳变参数控制，由式(5)或(3)可计算系统控制前后的响应。

## 3 数值结果

设MRVE夹层梁的参数$k=1$，$h_1=0.1$ m，$h_2=0.2$ m，$L=4$ m，$m=100$ kg/m$^2$，$\rho=1\ 100$ kg/m$^3$，$E_1=5\times10^8$ Pa，$c_0=0.002\sqrt{k_0}$，$\beta=0.01$，$S=\mathrm{diag}[0,1]$。按照式(9)确定最优参数控制，用龙格—库塔法计算受控与未

控梁系统的位移，并计算相应的响应标准差及其相对降低值，结果如图1—图4所示。图1是白噪声激励样本，图2展示的位移样本表明最优跳变参数控制可以达到显著的随机振动抑制效果。图3表明受控的响应标准差随控制参数界限扩大非线性地降低，图4表明响应标准差的相对降低值随控制参数界限非线性地增大，因此拓展控制参数界限可进一步改善控制效果，但该参数界限取决于MRVE材料特性及外加磁场强度。

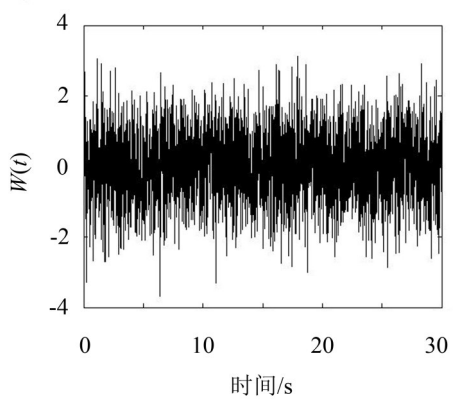



图1　高斯白噪声激励

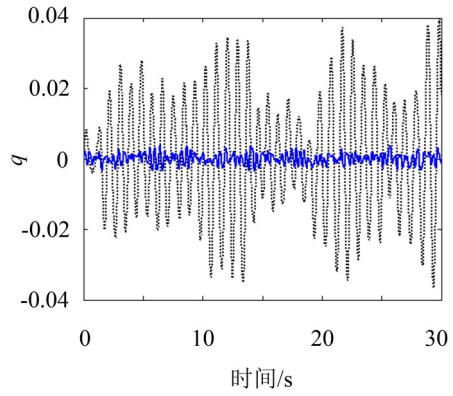



图2　控制前后位移

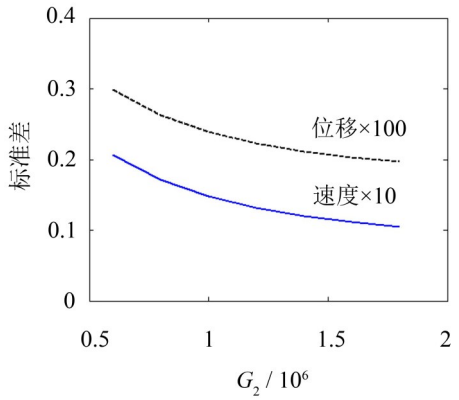



图3　响应标准差随参数界$G_2$变化

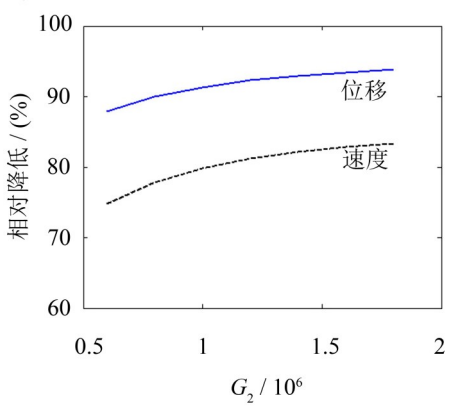



图4　响应标准差的相对降低随参数界$G_2$变化

## 4　结　语

本文提出了MRVE夹层梁的最优参数控制问题，综合应用随机动态规划原理与Bang-Bang策略发展了新的最优跳变参数控制方法。建立了MRVE夹层梁的振动方程与最优参数控制性能指标，应用动态规划方法建立HJB方程，应用Bang-Bang策略得到了系统随机振动的最优有界非线性跳变参数控制律。数值结果表明，对于MRVE夹层梁的随机振动，该最优跳变参数控制能达到显著的控制效果。

**参考文献：**

[1] Ying, Z G, Ni Y Q, Sajjadi M. Nonlinear dynamic characteristics of magneto- rheological visco- elastomers [J]. **Sci. China, Tech. Sci.**, 2013, 56: 878-883.

[2] Zhou G Y, Wang Q. Study on the adjustable rigidity of magnetorheological- elastomer- based sandwich beam[J]. **Smart Mater. Struct.**, 2006, 15: 59-74.

[3] Choi W J, Xiong Y P, Shenoi R A. Vibration characteristics of sandwich beam with steel skins and magnetorheological elastomer cores[J]. **Adv. Struct. Eng.**, 2010, 13: 837-847.

[4] Ying Z G, Ni Y Q, Chen Z H. Micro-vibration suppression of equipment supported on a floor incorporating magneto-rheological elastomer core[J]. **J. Sound Vib.**, 2011, 330: 4369-4383.

[5] Felgenhauer U. Directional sensitivity differentials for parametric Bang- Bang control problems. Lirkov I, Margenov S, Wasniewski J Eds. Large- Scale Scientific Computing[C]. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 264-271.

[6] 张巍，应祖光，胡荣春. 拉索非线性随机振动的最优有界半连续控制[J]. **噪声与振动控制**，2014，34(2)：133-135.

[7] Stengel R F. Optimal Control and Estimation [M]. New York: John Wiley & Sons, 1994.