

文章编号:1006-1355(2015)02-0032-04

# 波传播方法在任意边界杆梁结构振动中的应用

周海军<sup>1</sup>, 贺才春<sup>1</sup>, 李玩幽<sup>2</sup>

(1. 株洲时代新材料科技股份有限公司, 湖南 株洲 412007;  
2. 哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:**采用波传播方法对任意边界杆梁结构的振动特性进行了研究。并且通过设置边界弹簧系数为零或无穷大可以得到所有的传统边界条件。杆梁位移被表示为包含波数的波传播形式。得到了一个由不同支撑和连接刚度边界的三跨梁结果,并且与文献进行了比较。同时,设计了一个被人为断开成两段刚性耦合的悬臂杆梁模型,及一个直角耦合两端固支杆梁模型。通过与ANSYS模型所得结果的对比验证了方法的正确性。

**关键词:**振动与波;波传播法;多跨梁;耦合结构;任意边界

中图分类号:O 32

文献标识码:A

DOI编码:10.3969/j.issn.1006-1355.2015.02.008

## Application of Wave Propagation Method to Vibration Analysis of Rod-and-Beam Structures with Arbitrary Boundary Conditions

ZHOU Hai-jun<sup>1</sup>, HE Cai-chun<sup>1</sup>, LI Wan-you<sup>2</sup>

(1. Zhuzhou Times New Material Technology Co. Ltd., Zhuzhou 412007, Hunan China;  
2. College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Wave propagation method was used for vibration analysis of rod-and-beam structures with arbitrary boundary conditions. In this method, all the conventional boundary conditions of the structures can be included by setting the stiffness of the boundary springs to be infinity or zero. The displacements of rods and beams can be expressed in the wave propagation form including wave numbers. A three-span beam with different supporting conditions and connecting stiffness was analyzed with this method and the results were compared with those shown in published literatures. Meanwhile, two additional models were presented. One was a cantilever beam divided into two rigidly connected beams. The other was a right-angle rod-and-beam combined structure. The results were compared with those obtained from ANSYS software. The correctness of this method was verified.

**Key words:** vibration and wave; wave propagation method; multi-span beam; combined structure; arbitrary boundary conditions

梁结构在工程结构中被广泛应用,也引起了众多学者对其振动特性的研究。文献[1]—文献[5]对各种多跨的,轴向不均匀的以及任意边界的梁结构,进行了固有及动态特性研究。文献[6]—文献[7]提出了一种改进型傅里叶展开级数,描述了梁的位移形式,研究了任意支撑及连接边界的单一、多跨梁结构的振动特性。方法新颖,但其理论推导过于繁琐;文献[8]采用此方法分析了轴系的横向振动特性。文献[9]采用传播、反射及透射波的波传播方法分析

了两跨不均匀梁的结构特性。文献[10]采用波传播方法分析研究了两端固支轴向运动梁的横向振动,指出波传播方法能从物理角度解释轴向运动梁的振动本质。

采用文献[11]—文献[13]所采用的波传播方法,将杆梁位移写成波传播形式,代入控制微分方程之后得到波数与圆频率之间的关系,并回代回位移形式,然后求解满足边界及耦合条件的杆梁模型结果。

### 1 控制方程及位移形式

基于欧拉—伯努利理论的梁的控制微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

杆的控制微分方程为

收稿日期:2014-07-18

作者简介:周海军(1984—),男,湖南益阳人,博士,主要从事船舶振动噪声控制研究工作。

E-mail: zhouhj2@teg.cn

$$EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

其中  $w, u, E, I, A, \rho$  分别为梁的横向位移, 杆的纵向位移, 弹性模量, 惯性矩, 截面积, 密度。

将梁的位移形式表示为

$$w(x,t) = A_w e^{jk_w x} e^{j\omega t} \quad (3)$$

其中  $A_w, k_w, \omega$  分别为振幅, 波数, 圆频率。将式(3)代入式(1), 可得

$$EI k_w^4 - \rho A \omega^2 = 0 \quad (4)$$

式(4)的根即梁的波数, 可得:

$$k_{w1} = -(\rho A \omega^2 / EI)^{1/4}, k_{w2} = j(\rho A \omega^2 / EI)^{1/4},$$

$$k_{w3} = (\rho A \omega^2 / EI)^{1/4}, k_{w4} = -j(\rho A \omega^2 / EI)^{1/4}。$$

此时, 解的形式可以写为

$$w(x,t) = \sum_{s=1}^4 A_{ws} e^{jk_{ws} x} e^{j\omega t} \quad (5)$$

同理, 将杆的位移形式表示为

$$u(x,t) = A_u e^{jk_u x} e^{j\omega t} \quad (6)$$

将式(6)代入式(2), 可得

$$EA k_u^2 - \rho A \omega^2 = 0 \quad (7)$$

式(7)的根即杆的波数, 可得

$$k_{u1} = -(\rho A \omega^2 / EA)^{1/2}, k_{u2} = (\rho A \omega^2 / EA)^{1/2}。$$

此时, 解的形式可以写为

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^2 A_{us} e^{jk_{us} x} e^{j\omega t} \quad (8)$$

## 2 边界条件及求解

### 2.1 多跨梁结构的耦合条件

如图1所示的多跨梁结构模型。  $k_{i,j}$  和  $K_{i,j}$  分别是梁  $i$  和  $j$  之间连接处的线性 and 扭转弹簧系数;  $\tilde{k}_{i0}$ ,  $\tilde{k}_{i1}$ ,  $\tilde{K}_{i0}$ ,  $\tilde{K}_{i1}$  分别是梁  $i$  左右两端的线性 and 扭转弹簧系数。  $N$  为梁段数。

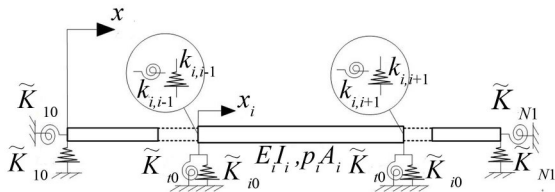


图1 多跨梁结构模型

其任意边界条件为:

在  $x_i = 0$  处(式中简略时间变量  $t$ ),

$$k_{i,i-1}(w_i(0) - w_{i-1}(L_{i-1})) + \tilde{k}_{i0} w_i(0) = -E_i I_i w_i(0)''' \quad (9)$$

$$K_{i,i-1}(w_i(0)' - w_{i-1}(L_{i-1})') + \tilde{K}_{i0} w_i(0)' = E_i I_i w_i(0)'' \quad (10)$$

在  $x_i = L_i$  处,

$$k_{i,i+1}(w_i(L_i) - w_{i+1}(0)) + \tilde{k}_{i1} w_i(L_i) = E_i I_i w_i(L_i)''' \quad (11)$$

$$K_{i,i+1}(w_i(L_i)' - w_{i+1}(0)') + \tilde{K}_{i1} w_i(L_i)' = -E_i I_i w_i(L_i)'' \quad (12)$$

在第一段梁的左端

$$\tilde{k}_{10} w_1(0) = -E_1 I_1 w_1(0)''' \quad (13)$$

$$\tilde{K}_{10} w_1(0)' = E_1 I_1 w_1(0)'' \quad (14)$$

在第  $N$  段梁的右端

$$\tilde{k}_{N1} w_N(L_N) = E_N I_N w_N(L_N)''' \quad (15)$$

$$\tilde{K}_{N1} w_N(L_N)' = -E_N I_N w_N(L_N)'' \quad (16)$$

将式(5)代入边界条件式(9)-式(16), 可以整理得到一个关于解的幅值的矩阵形式的方程

$$BX = 0 \quad (17)$$

其中

$$X = [A_{11} \cdots A_{14} \quad \cdots \quad A_{i1} \cdots A_{i4} \quad \cdots \quad A_{N1} \cdots A_{N4}]^T。$$

其有非零解的条件为:  $|B| = 0$ , 即可得多跨梁结构的固有频率。

### 2.2 杆梁结构的耦合条件

如图2所示的杆梁耦合结构模型。  $k_{w0}, k_{w1}$ ,  $k_{u0}, k_{u1}$  分别是左右两端线性弹簧系数, 下标  $w$  和  $u$  分别表示横向和纵向;  $K_0, K_1$  分别是左右两端的扭转弹簧系数。  $\theta$  为两段梁的夹角, 横向和纵向位移会在两段梁之间耦合。

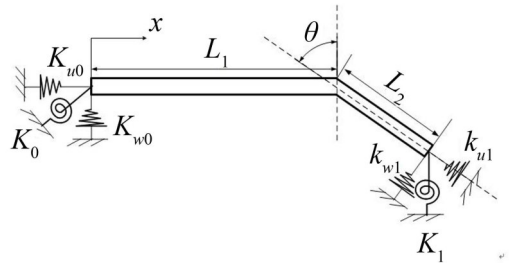


图2 杆梁耦合结构模型

其边界条件为:

在第一段梁  $x = 0$  处

$$k_{w0} w_1(0) = -E_1 I_1 w_1(0)''' \quad (18)$$

$$K_0 w_1(0)' = E_1 I_1 w_1(0)'' \quad (19)$$

$$k_{u0} u_1(0) = E_1 A_1 u_1(0)' \quad (20)$$

在第二段梁  $x = L_2$  处

$$k_{w1} w_2(L_2) = E_2 I_2 w_2(L_2)''' \quad (21)$$

$$K_1 w_2(L_2)' = -E_2 I_2 w_2(L_2)'' \quad (22)$$

$$k_{u1} u_2(L_2) = -E_2 A_2 u_2(L_2)' \quad (23)$$

如图3所示, 在其连接处, 其位移与力的连续协调条件为

$$u_1(L_1) = u_2(0) \sin \theta + w_2(0) \cos \theta \quad (24)$$

$$w_1(L_1) = w_2(0) \sin \theta - u_2(0) \cos \theta \quad (25)$$

$$\partial w_1(L_1) / \partial x = \partial w_2(0) / \partial x \quad (26)$$

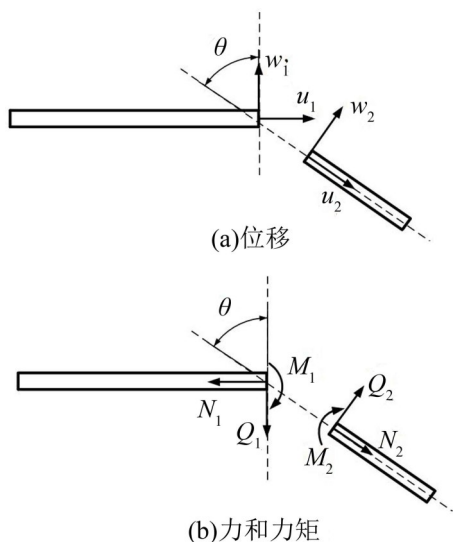


图3 位移、力和力矩示意图

$$Q_1(L_1) = Q_2(0)\sin\theta - N_2(0)\cos\theta \quad (27)$$

$$N_1(L_1) = N_2(0)\sin\theta + Q_2(0)\cos\theta \quad (28)$$

$$M_1(L_1) = M_2(0) \quad (29)$$

其中  $M = EIw(x)''$ ,  $Q = EIw(x)'''$ ,  $N = EAu(x)'$ 。

将式(5)和式(8)代入式(18)一式(23)以及式(24)一式(30)共12个边界条件方程,可以整理写成矩阵形式的特征方程如下

$$BX = 0 \quad (30)$$

其中

$$X = [A_{1,w1} \cdots A_{1,w4} \ A_{1,u1} \ A_{1,u2} \ A_{2,w1} \cdots A_{2,w4} \ A_{2,u1} \ A_{2,u2}]^T。$$

其有非零解的条件为:  $|B| = 0$ , 即可得耦合结构的固有频率。

### 3 结果与分析

#### 3.1 三跨梁结构

首先引用文献[7]中的三跨梁模型作为算例,其梁段、支撑和连接参数见表1和表2。

从表2梁1支撑参数可以看出,其左端弹簧系数模拟的是固支边界,同时可以看出梁3右端为简支边界。梁段之间为弹性连接。在MATLAB软件中编程计算,表3为本文结果与文献结果对比,结果吻合很好。

表1 梁段参数

变量	梁1	梁2	梁3
长度/m	1.0	1.5	2.1
截面积/m <sup>2</sup>	$5 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$
惯性矩/kgm <sup>2</sup>	$1 \times 10^{-10}$	$5 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-10}$
弹性模量/pa	$2.07 \times 10^{11}$	$2.07 \times 10^{11}$	$2.07 \times 10^{11}$
密度/(kg/m <sup>3</sup> )	7 800	7 800	7 800

表2 支撑和连接参数

支撑参数/(N/m)			连接参数
梁1	梁2	梁3	
k 10=1 E10	k 20=4 000	k 30=5 000	k 12=1 000
k 11=5 000	k 21=4 000	k 31=1 E10	k 23=1 000
K 10=1 E10	K 20=1 000	K 30=2 000	K 12=200
K 11=2 000	K 21=1 000	K 31=0	K 23=300

表3 前10阶频率对比

阶数	固有频率/Hz		偏差/(%)
	式(17)	文献[7]	
1	4.368 96	4.367 5	0.033 5
2	13.654 1	13.646	0.059 0
3	13.846 6	13.848	-0.009 8
4	21.689 8	21.689	0.003 7
5	26.701 6	26.697	0.017 2
6	34.336 2	34.325	0.032 8
7	42.117 3	42.116	0.003 2
8	46.904 7	46.903	0.003 7
9	58.155 4	58.149	0.010 9
10	62.473 2	62.467	0.010 0

#### 3.2 悬臂梁结构

如图4所示的悬臂梁模型。梁段总长为1.5,将其人为断开为1:0.5的两段刚性耦合的梁。耦合角度取为90°。梁段取为圆形截面,直径为0.01,密度和弹性模量分别取7 850和 $2.1 \times 10^{11}$ 。左边界弹簧刚度取为无穷大模拟刚性固支,本文数值取为 $1 \times 10^{10}$ ,右边弹簧刚度取为零模拟自由边界。

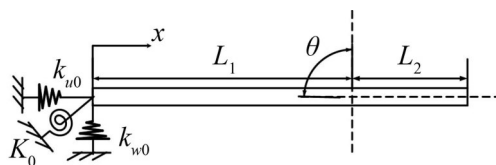


图4 悬臂梁模型

表4为本文结果与ANSYS软件所得结果的对比。ANSYS中采用Beam 3单元,自由划分网格。通过ANSYS振型看出第1阶—10阶为单一横向固有频率,第11和19阶为纵向固有频率。虽然横纵振动在线性直梁模型中没有耦合,本文方法也能准确的计算出固有频率。

#### 3.3 直角杆梁结构

如图5所示的直角杆梁模型。两段梁均长0.5,梁段参数同3.2节,耦合角度为0°。左右边界弹簧刚度均取为无穷大模拟固支边界,本文数值取为 $1 \times 10^{10}$ 。表5为本文结果与ANSYS结果的对比,可见也吻合得很好。

表4 与ANSYS结果对比

阶数	固有频率/Hz	
	式(31)	ANSYS
1	3.216 5	3.215 9
2	20.166	20.153
3	56.438	56.425
4	110.59	110.56
5	182.81	182.75
6	273.08	272.97
7	381.49	381.21
8	507.86	507.49
9	652.22	651.80
10	814.71	814.16
11	861.19	862.13
19	2 583.4	2 588.8

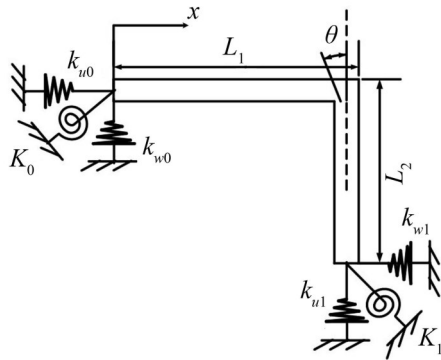


图5 直角杆梁模型

表5 与ANSYS结果对比

阶数	固有频率/Hz	
	式(31)	ANSYS
1	127.01	126.86
2	184.46	183.94
3	411.89	410.56
4	509.29	505.77
5	860.71	854.71
6	1 002.1	987.09
7	1 476.5	1 455.5
8	1 669.2	1 615.1
9	-	2 181.8
10	2290.9	2 271.7

## 4 结 语

采用波传播方法研究了多跨梁、耦合杆梁结构的固有振动特性。将杆梁位移形式写成波传播形式,代入控制微分方程之后可以求得波数与结构固有频率之间的关系,最后求解满足边界条件的波数

方程即可求得固有频率。与文献及有限元方法的对比验证了本文方法的准确性。而在求解耦合杆梁结构时出现的漏根现象,还有待进一步研究。

### 参考文献:

- [1] S. Naguleswaran. Transverse vibration and stability of an Euler- Bernoulli beam with step change in cross- section and in axial force[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2004, 270: 1045-1055.
- [2] S. Naguleswaran. Transverse vibration of an uniform Euler- Bernoulli beam under linearly varying axial force[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2004, 275: 47-57.
- [3] J.W. Jaworski and E.H. Dowell. Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: Comparison of several theoretical methods with experiment[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2008, 312: 713-725.
- [4] Hsien-Yuan Lin. Dynamic analysis of a multi-span uniform beam carrying a number of various concentrated elements[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2008, 309: 262-275.
- [5] J. T. S.Wand and C. C. Lin. Dynamic analysis of generally supported beams using Fourier series[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1996, 193: 285-293.
- [6] W. L. Li. Free vibrations of beams with general boundary conditions[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2000, 237: 709-725.
- [7] W. L. Li, Hongan Xu. An exact Fourier series method for the vibration analysis of multispan beam systems[J]. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, 2009, 4: 021001-10.
- [8] 周海军, 吕秉琳, 杜敬涛, 等. 用改进傅里叶级数的方法研究轴系横向振动特性[J]. **噪声与振动控制**, 2011, 4: 68-72.
- [9] S. Z. Peng and J. Pan. Acoustical wave propagator technique for time-domain reflection and transmission of flexural wave packets in one-dimensional stepped beams [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2006, 297: 1025-1047.
- [10] 郝芹, 何铿. 波传播法分析两端固支轴向运动梁的横向振动[J]. **噪声与振动控制**, 2007, 1: 41-44.
- [11] Li Xuebin. Study on free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2008, 311: 667-682.
- [12] X. M. Zhang, G. R. Liu and K. Y. Lam. Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2001, 239: 397-403.
- [13] Mauro Caresta and Nicole J. Kessissoglou. Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical conical shells[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2010, 329: 733-751.