

文章编号: 1006-1355(2014)05-0001-05+21

# 结构声辐射的源强声辐射模态分析方法

聂永发<sup>1,2</sup>, 朱海潮<sup>1,2</sup>, 毛荣富<sup>1,2</sup>

(1. 海军工程大学 振动与噪声研究所, 武汉 430033;

2. 船舶振动噪声重点实验室, 武汉 430033)

**摘要:** 为了解决不易获取复杂结构振速声辐射模态和利用其计算复杂结构外辐射声场困难的问题, 提出源强声辐射模态分析方法。该方法利用简单源积分公式将结构表面连续的源强分布等效为一组简单源源强分布, 利用这组简单源源强分布构造了结构辐射声功率2次型表达式, 其2次型系数定义一个辐射阻矩阵, 辐射阻矩阵的特征向量就构成了源强声辐射模态, 从而实现复杂结构总辐射声功率的解耦。只要获得声辐射模态的展开系数, 声场中的声压、质点法向速度等声学量都可由源强声辐射模态叠加得到。球形声源和棱台体声源的分析表明: 源强声辐射模态保留了传统的声辐射模态优点, 更方便解决复杂结构声辐射问题。

**关键词:** 声学; 简单源; 声辐射; 源强声辐射模态; 声场分布模态

中图分类号: O422.6; TB532

文献标识码: A

DOI编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2014.05.001

## Mode Analysis Method for Structure's Sound Radiation Analysis Based on Source Intensity Acoustic Radiation Modes

NIE Yong-fa<sup>1,2</sup>, ZHU Hai-chao<sup>1,2</sup>, MAO Rong-fu<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Noise and Vibration, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;

2. National Key Laboratory on Ship Vibration and Noise, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** Velocity acoustic radiation modes can be used for solving the radiation problems of structures, but it is difficult to obtain the velocity acoustic radiation modes of complicated structures. In this paper, a method based on source intensity acoustic radiation modes is proposed. In this method, the continuous source intensity distributed on the surface of the structure is equivalently replaced by a set of simple source intensity distributions in terms of a simple source integration formula. Then, the set of simple source intensity distributions is used to construct a second order expression for the structural sound radiation power. In fact, this second order expression has defined a radiation resistance matrix, which eigenvectors constitute a set of acoustic radiation modes. Thus, decoupling of the total sound radiation power of the complex structure is realized. Given the expansion coefficients of the sound radiation modes, the sound pressure, normal velocities of particles and some other acoustic quantities in the acoustic field can be acquired by the superposition of the source intensity acoustic radiation modes. Analyses of a spherical sound source and a truncated-pyramid sound source show that the proposed method retains the advantages of the traditional acoustic radiation modes method and is more suitable for solving the sound radiation problems of the complicated structures.

**Key words:** acoustics; simple source; acoustic radiation; source strength acoustic radiation modes; field distribution modes

90年代初, 一种用于解决结构声辐射问题的模态分析理论—声辐射模态理论被提了出来<sup>[1, 2]</sup>。

收稿日期: 2013-12-03

项目基金: 国家自然科学基金(批准号: 51305452)

作者简介: 聂永发(1978-), 男, 吉林通榆人, 博士生, 主要研究方向: 振动与噪声控制。

通信作者: 朱海潮, 男, 博士生导师。

E-mail: haiczhu@163.com

结构声辐射模态单独辐射声功率, 相互之间不发生影响, 实现了结构辐射声功率的解耦, 简化了声辐射问题的分析计算。目前, 声辐射模态分析方法主要应用于主动控制<sup>[3]</sup>, 源重建<sup>[4]</sup>, 声学设计优化<sup>[5, 6]</sup>等方面。根据构成辐射声功率2次型参量的不同, 声辐射模态可分为振速声辐射模态<sup>[1, 2]</sup>、声压声辐射模态<sup>[7]</sup>和力辐射模态<sup>[8]</sup>等。不管那一种声辐射模态, 能够实现结构声辐射供解耦是其本质特征, 也是其解决结构声辐射问题的最大优势所在。

一般情况下,声辐射模态特指振速声辐射模态。最早,振速声辐射模态是通过辐射算子奇异值分解获得的,虽然所获得的声辐射模态为相互正交的复向量,但在计算和处理上都极不方便。后来 Sarkissian<sup>[4]</sup>等证明了声辐射阻抗矩阵的实部经过特征值分解得到的实特征向量即为结构的声辐射模态,虽然这种方法得到的离散声辐射模态是正交实向量,但目前一般只能用于简单的梁、板结构的分析。文献[9]提出了一种基于泛函算子谱理论的辐射模态分析理论,但其得到辐射模态未能使结构辐射声功率解耦。因此,该文献提出的理论不属于传统声辐射模态理论范畴。

对于复杂结构,可以利用边界元等数值方法计算其声辐射模态,但边界元法在计算辐射阻抗矩阵时要处理奇异积分和解的非唯一性问题,及辐射阻抗矩阵不对称问题<sup>[10, 11]</sup>。为了解决获取复杂结构振速声辐射模态困难和利用振速声辐射模态计算结构远场辐射不方便的问题,本文提出以复杂结构表面源强为参量的可方便应用于复杂结构声辐射分析的源强声辐射模态分析方法。

## 1 源强声辐射模态理论

如图1所示,以角频率 $\omega$ 振动的复杂结构置于密度为 $p_0$ 的均质流体中,流体中声速为 $c_0$ 。结构振动表面为 $S_0$ , $n$ 为表面 $S_0$ 的外法线方向,表面 $S_0$ 所包围的体积空间为 $V_i$ ,结构表面以外的无界空间为 $V_0$ 。令 $p(r')$ 为空间 $V_0$ 中声压。假设声源由表面 $S_0$ 完全包围,在 $V_0$ 中无其他声源,结构产生的是时谐声场,为了表示方便省略了时谐项 $e^{-j\omega t}$ 。结构产生的声场声压在空间 $V_0$ 满足Helmholtz方程,在边界表面 $S_0$ 上满足Neumann边界条件,在无穷远处满足Sommerfeld辐射条件。

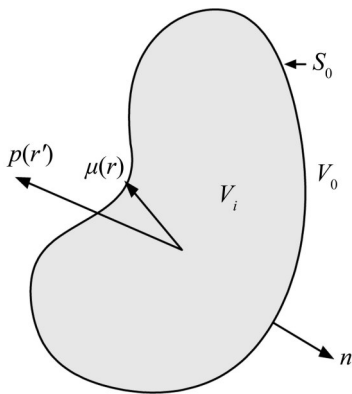


图1 复杂结构示意图

由内、外Helmholtz积分方程可推导出声场声压的简单源公式<sup>[12]</sup>

$$p(r') = -j\rho_0 c_0 k \iint_{S_0} \mu(r) G(r|r') dS_0 \quad (1)$$

其中 $k = \omega / c_0$ 为波数, $j = \sqrt{-1}$ , $r'$ 为空间 $V_0$ 中任意点处的位置向量, $r$ 表示结构表面 $S_0$ 上点的位置向量, $\mu(r)$ 为结构表面源强密度函数, $G(r|r')$ 为自由空间格林函数

$$G(r|r') = e^{-jk|r'-r|} / (4\pi|r'-r|) \quad (2)$$

将表面源强密度函数离散为简单源的叠加<sup>[13]</sup>

$$\mu(r) = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(r - r_i) \quad (3)$$

其中 $N$ 为简单源数目, $\delta$ 为Dirac Delta函数, $\mu_i$ 为位于表面 $r_i$ 的简单源的复强度,简单源取为半径 $r_i$ 的脉动小球源,并满足如下条件

$$kr_i \ll 1 \quad (4)$$

其中下标 $i = 1, 2, \dots, N$ 表示简单源序号。假定简单源的表面法向速度 $u_i$ 均匀分布,简单源的表面积为 $s_i = 4\pi r_i^2$ ,则 $u_i$ 与 $\mu_i$ 有如下关系

$$\mu_i = 4\pi r_i^2 u_i = u_i s_i \quad (5)$$

由线性声学叠加原理,介质中任意一点的声场应等于所有声源各自辐射场声压总和。 $i$ 号简单源表面受到辐射场的总作用力为 $F_i$

$$F_i = f_{i1} + f_{i2} + f_{i3} + \dots + f_{iN} = \sum_j f_{ij} \quad (6)$$

式中 $f_{ii}$ 为 $i$ 号简单源自身辐射场声压作用在自身辐射表面上产生的力; $f_{ij}$ 为 $j$ 号简单源辐射场声压作用在 $i$ 号简单源辐射表面上产生的力。根据辐射阻抗的定义, $i$ 号简单源的总辐射阻抗为

$$Z_i = Z_{ii} + \sum_{j \neq i} \frac{f_{ij}}{u_i} \quad (7)$$

式中第1项是自辐射阻抗,求和项是其他简单源互作用引起的辐射阻抗。对于简单源有

$$f_{ij} = Z_{ij} u_j \quad (8)$$

式中 $Z_{ij}$ 为 $j$ 号简单源对 $i$ 号简单源的互辐射阻抗,表示 $j$ 号简单源单位振速声场作用于 $i$ 号简单源上的力。 $i$ 号简单源的声场中声压记为

$$p_{ii} = jk\rho c \frac{\mu_i}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (9)$$

式中 $r$ 为场点中一点到声源中心的距离。 $i$ 号简单源表面所受到的自身声场施加的力为

$$f_{ii} = p_{ii} s_i = jk\rho c \frac{u_i s_i^2}{4\pi r_i} e^{-jkr_i} \quad (10)$$

因此 $i$ 号简单源自辐射阻抗为

$$Z_{ii} = f_{ii}/u_i = jk\rho c \frac{s_i^2}{4\pi r_i} e^{-jkr_i} \approx jk\rho c \frac{s_i^2}{4\pi r_i} (1 - jkr_i) \quad (11)$$

$j$ 号简单源辐射声场作用在 $i$ 号简单源的表面

上声压为

$$p_{ij} = jk\rho c \frac{u_j s_j}{4\pi r_{ij}} e^{-jkr_{ij}} \quad (12)$$

式中  $r_{ij}$  为  $j$  号简单源和  $i$  号简单源的中心间距。 $j$  号简单源辐射声场作用在  $i$  号简单源的表面上的作用力等于

$$f_{ij} = jk\rho c \frac{u_j s_j s_i}{4\pi r_{ij}} e^{-jkr_{ij}} \quad (13)$$

$j$  号简单源对  $i$  号简单源作用的附加阻抗为

$$\begin{aligned} \frac{f_{ij}}{u_i} &= jk\rho c \frac{s_j s_i}{4\pi r_{ij}} (\cos kr_{ij} - j \sin kr_{ij}) \\ \frac{u_j}{u_i} &= Z_{ij} \frac{u_j}{u_i} \end{aligned} \quad (14)$$

观察式(14)显然有

$$Z_{ji} = Z_{ij} \quad (15)$$

由此  $i$  号简单源的总辐射阻抗为

$$Z_i = Z_{ii} + \sum_{j \neq i}^N Z_{ij} \frac{u_j}{u_i} \quad (16)$$

$i$  号简单源的平均有功辐射声功率

$$W_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u_i^* F_i) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u_i^* Z_i u_i) \quad (17)$$

联立式(16)和式(17)

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_j^N \operatorname{Re}(u_i^* Z_{ij} u_j) \quad (18)$$

则  $N$  个简单源的总辐射声功率为

$$W = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \operatorname{Re}(u_i^* Z_{ij} u_j) \quad (19)$$

联立式(5)、式(11)、式(14)和(19)并整理有

$$W = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \operatorname{Re}(\mu_i^* z_{ij} \mu_j) \quad (20)$$

其中

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{j k \rho c}{4 \pi r_i} (1 - j k r_i) & i = j \\ \frac{j k \rho c}{4 \pi r_{ij}} (\cos k r_{ij} - j \sin k r_{ij}) & i \neq j \end{cases} \quad (21)$$

因为  $z_{ij} = z_{ji}$  式(21)可表示为矩阵形式

$$W = (\mu^H (z + z^H) \mu) / 4 = \mu^H R \mu \quad (22)$$

其中  $R$  为  $z$  实部的  $1/2$ , 其表达式为

$$R = \frac{k^2 \rho_0 c_0}{8\pi} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin k r_{12}}{k r_{12}} & \cdots & \frac{\sin k r_{1N}}{k r_{1N}} \\ \frac{\sin k r_{21}}{k r_{21}} & 1 & \cdots & \frac{\sin k r_{2N}}{k r_{2N}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\sin k r_{N1}}{k r_{N1}} & \frac{\sin k r_{N2}}{k r_{N2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Song<sup>[13]</sup>利用结构内部空间一组有限数目的单

极子源也获得了与式(22)和式(23)相类似公式。由于结构向外辐射的声功率  $W$  恒为正值,  $R$  必为正定矩阵, 再由式(23)可以看出  $R$  为实对称矩阵,  $R$  只与计算频率和结构的形状有关。对  $R$  进行特征值分解有

$$R = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (24)$$

式中  $\Lambda$  为实对角矩阵, 其对角线元素  $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, N)$  为  $R$  以降序排列的特征值,  $\Phi$  为  $N \times N$  维矩阵,  $\Phi$  的列向量  $\varphi_i (i=1, 2, \cdots, N)$  为  $R$  的特征值对应的实特征向量, 满足下面的正交条件

$$\varphi_i^T \varphi_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (25)$$

$R$  的列向量  $\varphi_i (i=1, 2, \cdots, N)$  构成了  $N$  维空间的一组实正交基, 所以简单源源强向量  $\mu$  可由这组正交基唯一表示

$$\mu = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i = \Phi c. \quad (26)$$

式(26)将结构表面等效简单源源强向量  $\mu$  以一种模态叠加的形式表示出来,  $\varphi_i$  为结构表面等效简单源源强向量  $\mu$  一种可能的分布形式, 将  $\varphi_i$  称为结构第  $i$  阶源强声辐射模态,  $c_i$  称为第  $i$  阶源强声辐射模态展开系数, 至此一种基于源强分布向量的源强声辐射模态分析理论建立起来了。

## 2 声场的声辐射模态表示

声场中  $N$  点声压和质点振速的矩阵表达式为

$$P = -j \rho_0 c_0 k G \mu, \quad (27)$$

其中  $P = [p'_1 \ p'_2 \ \cdots \ p'_N]^T$ , 矩阵  $G$  中的元素为  $G_{ij} = G(r_i, r'_j)$ 。将式(26)代入式(27)

$$P = -j \rho_0 c_0 k G \Phi c, \quad (28)$$

这样辐射声场就以声辐射模态的形式表示出来了, 由声场声压和质点速度就可以求出声场其他的声学量了。

将  $\psi_i = G \varphi_i (i=1, 2, \cdots, N)$  称为第  $i$  阶源强声辐射模态对应的声场分布模态, 显然声场分布模态是声场的位置函数, 当声场中测量点分布在距结构足够远的球面上时, 声场分布模态就是其对应声辐射模态的远场指向性, 在第3节的实例分析中可以更清楚的理解这种关系。

将式(24)(26)代入到式(22)由

$$W = \sum_{i=1}^N \lambda_i |c_i|^2 = \sum_{i=1}^N W'_i \quad (29)$$

$W'_i$  为第  $i$  阶声辐射模态的独立辐射的声功率, 式(29)简化了结构辐射声功率的计算求解。



### 3 复杂结构的源强声辐射模态及声

#### 3.1 球形声源的声辐射模态与声场分布模态

取球形声源半径为  $a$ , 利用本文方法求解其在无量纲频率  $ka=0.5$  时的声辐射模态和对应的声场分布模态。图2绘出了球形声源前9阶声辐射模态的简单源源强分布, 其中的带有颜色的节点表示等效源位置, 节点颜色表示等效源的源强的大小。

图3为球形声源前9阶归一化了的远场声场分布模态及其相位, 图中颜色表示分布模态的相位信息, 很明显声场分布模态要么同相要么反相, 类似于驻波效应, 图中包络面到坐标原点的矢径幅值表示模态幅值。这种归一化了的远场声场分布模态其实就是该声辐射模态下简单源源强分布所等效的振源的远场指向性。

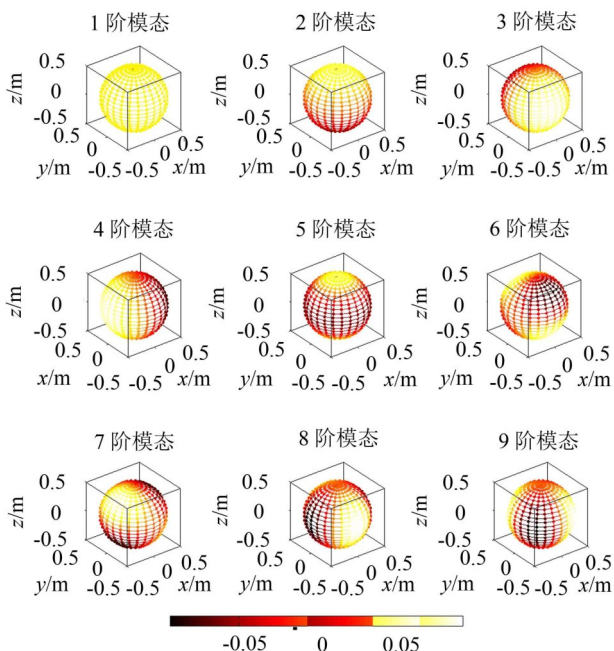


图2 球形声源前九阶源强声辐射模态

从图3可以清楚地看出: 1阶声辐射模态辐射的声场类似于单极子的辐射声场, 2到4阶声辐射模态辐射的声场类似于偶极子的辐射声场, 依次类推5到9阶声辐射模态辐射的声场类似于四极子的辐射声场, 更高阶的声辐射模态由于篇幅限制没有画出来, 但实际上都可以与多极子的辐射声场对应起来。理论上的球形声源2到4阶声辐射模态向量对应的特征值相等, 具有相同的辐射能力, 但由于在球面上的离散简单源取的不均匀, 使得等效简单源在球体的两极分布较密, 导致对应于  $z$  轴方向偶极子分布的声辐射模态辐射能力占优, 即对应的特征值较大。而在球面上沿纬线方向上离散简单源分布均匀, 所以对应于  $x$  轴和  $y$  轴偶极子分布的声辐射模

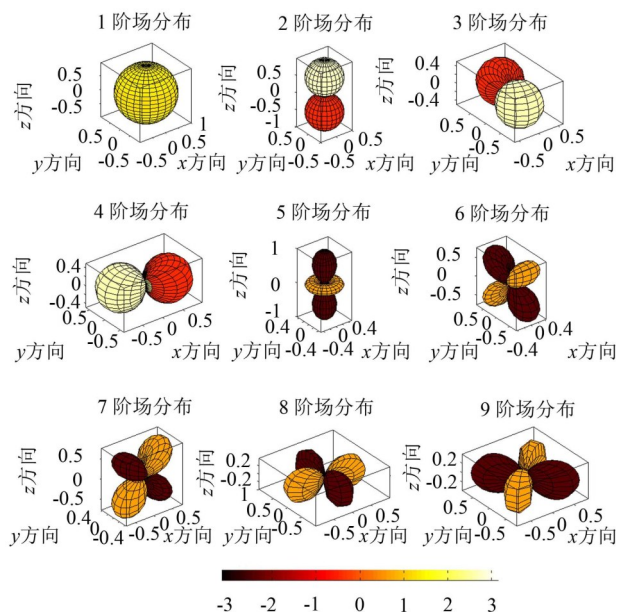


图3 球形声源归一化声场分布模态

态辐射能力相当, 其对应的特征值相同, 因此在对表面离散时应尽量使简单源均匀分布。5到9阶和更高阶声辐射模态也有类似特点, 不再赘述。

图4为球体各阶声辐射模态对应的归一化特征值, 由式(29)可知特征值的大小表示声辐射模态对远场辐射能力的大小。图4中曲线(实际上特征值为离散的点, 为了方便显示将离散的点连成曲线)表明第1阶声辐射模态的辐射能力最强, 随模态阶数的增加辐射能力迅速下降, 这与声辐射模态的辐射声场与多极子的辐射声场相类似是吻合的。图4中曲线具有成阶梯状下降趋势, 显然具有 Cunefare 所提出的“辐射效率分组效应”<sup>[14]</sup>。

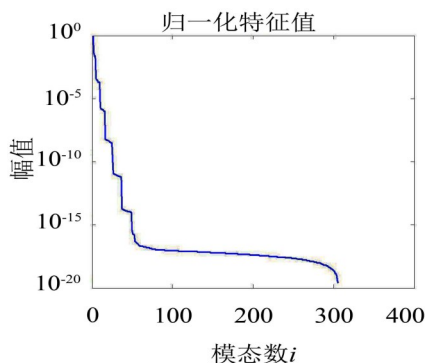


图4 球体声辐射模态对应的特征值曲线

#### 3.2 棱锥台体声源的声辐射模态与声场分布模态

图5所示的圆内接棱锥台体形状声源可看作是一个复杂声源。台体上表面为边长为  $a$  的正方形, 下表面为边长为  $b=2a$  的正方形, 台体高为  $h=(\sqrt{6}/2)a$ 。

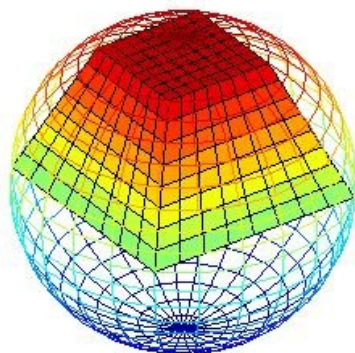


图5 棱锥台体模型

利用本文提出的声辐射模态分析方法分别计算棱锥台体在无量纲频率  $ka=0.25$  时的前9阶声辐射模态和远场声场分布模态及相位,如图6,图7所示。对比图6与图2,台体和球体的第1阶声辐射模态都是简单源源强均匀分布的呼吸模态;台体第2到4阶声辐射模态和球体的第2到4阶声辐射模态也相似,只是排列次序发生了变化。从图6中2到4阶声辐射模态的排列次序可以看出,沿着台体特征尺寸大的方向分布的声辐射模态对应的特征值大,即辐射能力强。台体的第5到第9阶模态和更高阶模态也有类似特点。因此,复杂声源与球形声源有类似的声辐射模态和远场指向性。

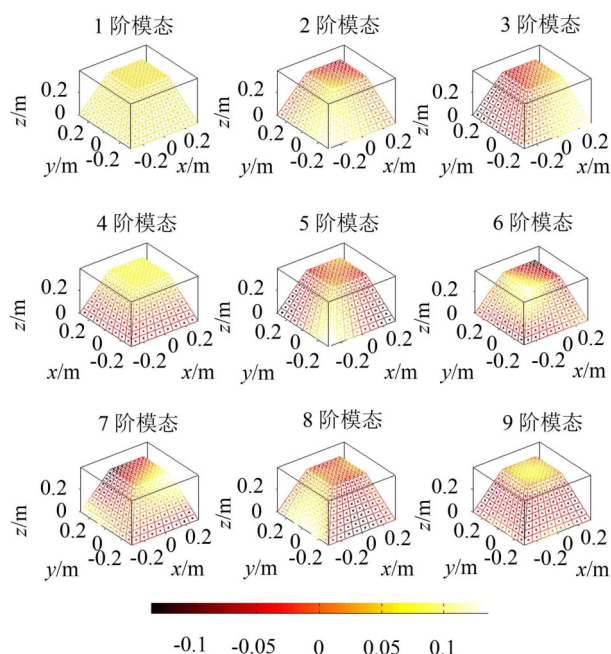


图6 棱锥台体前9阶源强声辐射模态

图7,图8表明:棱台体声场分布模态与球形声源有类似特点,也类似多级子的辐射声场,声辐射模态的辐射能力随着阶数的升高时急剧下降的,也具有比较明显的“辐射效率分组效应”。

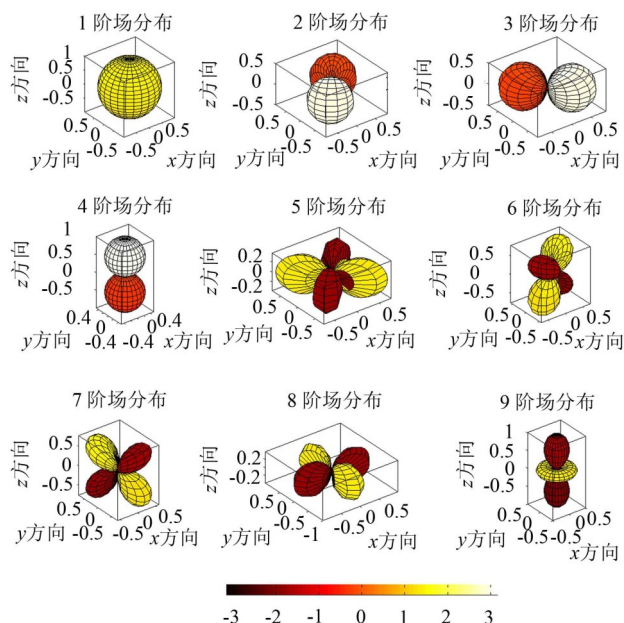


图7 棱锥台体归一化声场分布模态

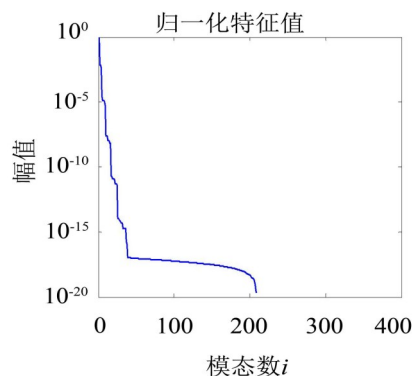


图8 棱台体声辐射模态对应的特征值曲线

## 4 结 语

利用与Helmholtz积分方程等效的简单源公式,将复杂结构表面离散为一组简单源分布形式。通过求解这组简单源的总平均辐射声功率定义了一个辐射阻矩阵,对辐射阻矩阵进行特征值分解得到各特征向量就是简单源源强的一种可能分布,将这种简单源源强的可能分布定义为源强声辐射模态,提出了一种针对复杂结构的声辐射模态分析理论。利用这种源强声辐射模态定义声场辐射模态,并指出归一化远场声场分布模态的物理意义就是其对应声辐射模态的远场指向性。通过对球形声源和棱锥台体声源的分析指出了复杂结构声辐射模态的辐射声场类似于多极子辐射声场,明确了声辐射模态的物理意义。文章还讨论了等效源分布对计算结果的影响,指出结构表面离散形式对声辐射模态的计算有影响。

(下转第21页)