文章编号：1006-1355(2014)04-0101-03+118

Volterra小波变换最优阈值的混沌去噪方法

位秀雷，林瑞霖，刘树勇，杨爱波

（海军工程大学 动力工程学院，武汉 430033）

摘　要：针对混沌信号小波去噪中难以确定最优阈值的问题，提出一种Volterra小波变换最优阈值的判定方法。利用小波变换将混沌信号分解，对不同尺度下的小波信号设定浮动因子以调节阈值大小，最后根据混沌序列Volterra自适应预测的相对误差选取最优阈值。利用该方法对不同维度的Lorenz混沌时间序列进行了去噪研究，结果表明所提方法是有效的。

关键词：振动与波；混沌信号；最优阈值；小波变换；Volterra级数

中图分类号：TB53；O322；TN911.7　　**文献标识码：**A　　DOI编码：10.3969/j.issn.1006-1335.2014.04.022

Chaotic Signal Denoising Based on Optimal Threshold of Volterra and Wavelet Transforms

WEI Xiu-lei，LIN Rui-lin，LIU Shu-yong，YANG Ai-bo

（College of Power Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China）

Abstract : How to determine the optimal threshold of chaotic signal based on wavelet transform is an important topic in chaotic identification. In this paper, a method for choosing the optimal threshold based on Volterra and wavelet transform is proposed. The chaotic signal is decomposed by wavelet transform. Then, a floating parameter is set to regulate the threshold of the wavelet signal in different scales according to the prediction error of the chaotic time series from the Volterra adaptive prediction. Denoising for chaotic time series generated by Lorenz system is simulated and the result is compared with those of the other methods. It is shown that the proposed method is effective.

Key words : vibration and wave ; chaotic signal ; the optimal threshold ; wavelet transform ; Volterra series

混沌信号是一种由确定性系统产生的非周期有界信号，在时域中显示出类似噪声的特点，在频域里表现出宽带的特征，这些特征使其在工程实践中有广阔的应用前景[1]。但由于混沌信号具有功率谱宽带性和类噪声性，其频带与混迭的其他信号的频带往往部分或者全部重叠，因而在实际应用中采用传统的线性滤波和频谱方法很难将其分开。近年来混沌降噪方法的研究愈来愈受到重视。常用的混沌信号去噪方法如局部投影法[2]和奇异谱分析法[3]，但这些方法在计算过程中需要进行大量的矩阵计算，而且算法中涉及混沌参数如嵌入维数、邻域半径的确定等，导致噪声背景下的计算难度较大，因而受到一定的限制。小波阈值降噪法[4]计算简单且有分析信号局部特征的能力，但是涉及到的阈值选取比较困难，常用的阈值方法有广义阈值法[4]及其改进算法[5]，随后韩敏等人又提出了一种阈值决策方法选取阈值[6]，刘艳霞[7]等人兼顾软、硬阈值函数的优点，改进了阈值去噪方法。这些方法对阈值选取提供了很好的参考，但是选取的阈值并不是在各个尺度下小波信号的最优阈值，不能实现最优滤波。

Volterra级数[8]是一种泛函数，在满足输入信号能量有限的条件下，大多数非线性系统都可以用Volterra级数逼近到任意准确程度。基于Volterra的非线性刻画能力和小波的多分辨分析特性[9]，建立小波—Volterra去噪模型，根据混沌序列Volterra自适应预测的相对误差大小选取最优阈值，能最大限度保留各个尺度下的有用信息，改善滤波效果。利用该模型对不同维度的Lorenz混沌时间序列进行了去噪研究，结果表明所提方法能非常有效滤除混沌信号中的噪声。

收稿日期：2013-11-18

基金项目：国家自然科学基金（51179197）；海洋工程国家重点实验室（上海交通大学）开放课题（1009）

作者简介：位秀雷（1988-），男，河南省获嘉人，博士生，目前从事非线性动力学研究。

Email: wxlcln@163.com

1 小波—Volterra去噪

假设含噪信号 $x(t)=s(t)+\omega(t)$，其中 $\omega(t)$ 为噪声信号，去噪的目的是从 $x(t)$ 中恢复 $s(t)$。对信号 $x(t)$ 进行二进制离散小波变换[4]

$$WT_{2^k}(\tau)=x(t)*\psi_{2^k,\tau}(t)=2^{-k/2}\int_R x(t)\overline{\psi(\frac{t-\tau}{2^k})}\mathrm{d}t \qquad (1)$$

对 $\forall f(t)\in L^2(R)$ 有关系式

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in Z}\left|WT_{2^k}(\tau)\right|^2\leqslant B\|f\|^2 \qquad (2)$$

说明二进制小波 $WT_{2^k}(\tau)$ 构成了 $L^2(R)$ 的一个框架，故它的小波逆变换公式存在。

二进制小波重建公式为：

$$f(t)=\sum_{k\in Z}\int_R WT_{2^k}(\tau)\psi_{2^k,\tau}(t)\mathrm{d}\tau \qquad (3)$$

小波变换可以确定函数奇异点的位置和奇异性指数，Mallat等人已经证明，信号奇异性与Lipshitz指数 α 间关系在二进小波时有

$$\log\left[\left|W_{2^k}f(t)\right|\right]\leqslant\log_2 k+j\alpha \qquad (4)$$

式中 k 为常数，j 为二进尺度。式(4)指出，当Lipshitz指数 $\alpha\geqslant 0$ 时，小波变换模极大值的幅度随尺度增大而增大；当Lipshitz指数 $\alpha\leqslant 0$ 时，小波变换模极大值的幅度随尺度的增大而减小。由于信号在其奇异点处得奇异指数 α 一般都大于零，而噪声具有负的奇异指数。因此，当小波变换尺度参数变化时，对混叠在一起的信号和噪声会产生不同的作用效果，可由小波变换模极大值点的衰减来判别信号小波尺度范围的取舍，再通过设定阈值对小波系数进行量化处理，最后对信号进行重构便可以达到降低噪声的目的。

显然，在小波去噪中，阈值的选取是一个关键问题，它直接影响着去噪效果。阈值选取过高，会过多地将信号当作噪声去掉；阈值选取过低,则保留的噪声信号过多，影响信号的进一步分析。传统的广义阈值去噪方法大都根据噪声能量估计信号信噪比来确定阈值大小，估计过程有一定的误差，其改进的阈值方法也是定量的逼近最优阈值，在小波分解的各个尺度上和最优阈值还有一定的偏差，尚不能实现最优滤波。为了使选取的阈值在各个尺度下都具有最佳的去噪效果，本文提出一种改进阈值方法：

$$t_i=\sigma\sqrt{2\log(N)}/\ln(\mu_i j+1) \qquad (5)$$

其中 j 为小波分解尺度，t_i 为响应尺度的阈值，N 为信号长度，μ_i 为相应尺度调节因子，$\mu_i\in(0:0.01:n)$，步长为0.01，n 为正常数，σ 为信号在最高尺度上的方差。

同时，利用2阶Volterra自适应滤波器构造预测混沌时间序列的非线性预测模型，对不同信噪比的混沌信号预测得到相对预测误差和信噪比的关系如图1所示，可以看出信噪比大于10，相对误差Perr接近于0；信噪比小于－50时，相对误差也趋近平缓。因此可利用混沌序列Volterra自适应预测效果作为(5)式中的调节因子 μ_i 的选择依据，从而调节各个尺度阈值大小，即预测相对误差Perr最小值所对应的阈值即为各尺度小波信号的最优阈值。

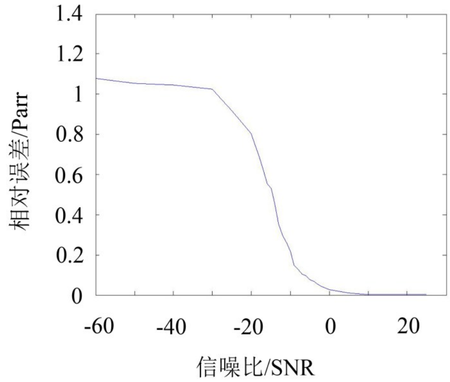


图1 信号信噪比和预测相对误差关系

相对误差定义为

$$\mathrm{Peer}=\sum_{k=1}^{N_p}\left[\hat{x}(k)-x(k)\right]^2\Big/\sum_{k=1}^{N_p}x^2(k)$$

其中 N_p 为滤波器的长度。

最优阈值法去噪步骤如下：

(1) 对含噪信号进行 j 层小波分解，得到小波分解的近似部分 a_n 和细节部分 d；

(2) 保持近似部分不变，对各个细节部分 d_1、$d_2\cdots d_n$ 按式(5)进行阈值量化处理，各尺度的调节因子 μ_i 在(0,n)范围浮动，由于调节因子在 10^{-2} 数量级浮动对预测误差Perr的影响较小，因此设定浮动步长为0.01；

(3) 对阈值量化后的信号利用Volterra混沌自适应预测方法进行分析处理，预测的相对误差为Perr，每一个Perr对应一组各分解尺度上的阈值 t_1、$t_2\cdots t_n$，选取Perr最小时所对应的阈值 t_1、$t_2\cdots t_n$ 作为最优阈值，其所对应的细节部分为 d_1、$d_2\cdots d_n$，对细节部分进行重构，重构后的各个尺度上的信号为 d_{11}、$d_{22}\cdots d_{nn}$；

(4) 去噪后的信号为：$s=d_{11}+d_{22}+...d_{nn}+a_n$。

2 仿真分析研究

实验信号为Lorenz方程产生的混沌信号，然后叠加白噪声作为有噪声污染的信号进行分析。

Lorenz方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{6}$$

选取参数的值为$\sigma=10$，$r=28$，$b=8/3$，用4阶龙格—库塔法进行迭代求值运算, 设定积分步长为0.01，删除前6 000个暂态点，对其后2 000个稳态点进行分析。在相空间重构基础上，选择尺度J小于等于m，m为嵌入维数，τ为重构延迟。$m=5$，$\tau=10$时，Lorenz系统的混沌特性可以很好地重构于相空间中，因此取$J=4$，采用正交紧支集(Daubechies)函数的改进小波函数sym 8作为小波基函数对混沌序列进行4尺度分解，使用本文方法对每一尺度上的信号进行阈值滤波，其中最小预测误差Perr = 8.1513×10^{-4} 所对应(5)式中的调节因子分别为$\mu_1=1.53$、$\mu_2=0.97$、$\mu_3=1.02$、$\mu_4=1.04$。去噪后的序列图如图2所示，其中‘*’代表无噪信号，‘－’代表去噪信号。

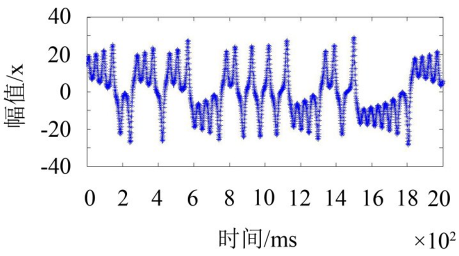


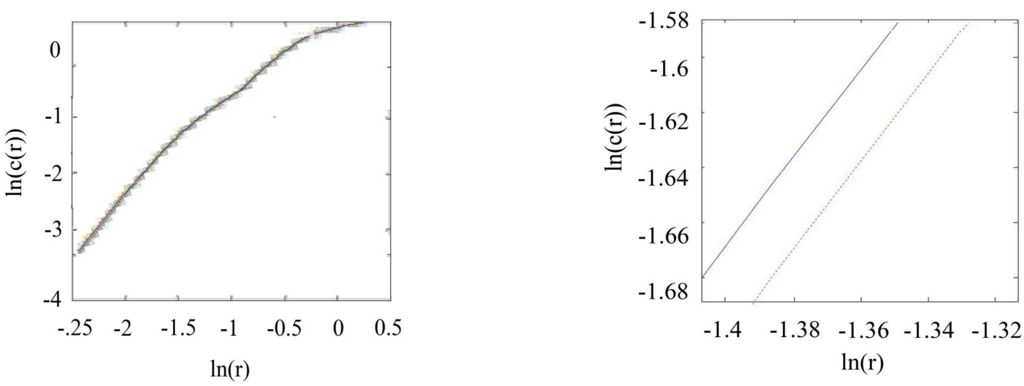
图2 最优阈值方法去噪后的时间序列

分别使用广义阈值及其改进方法、阈值决策方法和本文提出的最优阈值方法对信噪比为8 dB的混沌信号进行降噪处理，降噪后的信噪比[6]和最小均方误差[6]如表1所示，可以看出经最优阈值方法处理后的混沌信号信噪比最高，最小均方误差最小，表明本文方法能够更加有效地滤除隐藏在混沌信号内的噪声，提高了信噪比，减小了误差，更加适合工程需要。

表1 去噪后信号的信噪比及最小均方误差

阈值	MSE	SNR (dB)
广义阈值	6.764 9	16.210 7
改进阈值	5.926 1	16.580 4
决策阈值	4.043 5	17.546 4
优化阈值法	3.253 1	18.303 2

为进一步检验本文方法的去噪效果，基于产生于低维动力学系统的混沌信号关联维数相对较小，而产生高维系统的噪声的关联维数相对较大、且关联维数较小的其对应的关联维曲线斜率较小这一思想[10]，计算利用本文方法和阈值决策方法去噪后的混沌序列关联维数的大小来比较两者的去噪效果。选择重构延迟时间为4，嵌入维数为5，去噪后序列的 $\ln C(r)/\ln(r)$ 图如图3所示，‘-’表示利用本文方法去噪后混沌序列的 $\ln C(r)/\ln(r)$ 曲线；‘—’表示利用阈值决策方法去噪后混沌序列 $\ln C(r)/\ln(r)$ 曲线。由局部扩大曲线图可以看出由本文方法去噪后的混沌序列关联维曲线斜率相对较小，进一步证明了最优阈值方法的有效性。



(a) InC(r)/In(r)曲线图 (b) 局部放大图

图3 去噪序列的InC(r)/In(r)曲线图

3 结 语

本文基于小波多分辨分析原理，针对小波去噪中最优阈值难以确定的问题，将Volterra级数理论和小波理论结合起来，利用混沌时间序列Volterra自适应预测和混沌信号信噪比大小的关系，对小波信号各个尺度的最优阈值大小确定，克服了以往小波去噪阈值选择的盲目性，实验仿真结果表明该方法能够有效地去除信号中噪声，并保留序列的混沌特性。

（下转第118页）