文章编号：1006-1355(2014)03-0030-04

管道系统时域响应的传递矩阵计算方法

张志鑫[1]，柳贡民[2]，李帅军[2]

（1. 海军驻哈尔滨汽轮机厂有限责任公司军事代表室，哈尔滨 150046;
2. 哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院，哈尔滨 150001）

摘 要：基于输流管道数学模型，通过构造傅里叶级数展开形式的时域响应函数，对传递矩阵方法（TMM）求解的频响函数进行Laplace逆变换，实现管路系统的时域瞬态响应的计算；通过待定系数方法，基于TMM求解的简谐激励下的频响函数，求解管路系统的时域稳态响应，解决Laplace逆变换计算稳态响应不稳定的问题。最后以包含直管、弯管及弹性支撑的管路系统和悬臂梁为例，验证计算方法的正确性，与ANSYS的计算结果对比表明，所述的计算方法具有较高的精度，可用于管路系统时域响应的计算和分析。

关键词：振动与波；时域响应；传递矩阵；Laplace逆变换；待定系数法

中图分类号：TB123 **文献标识码：**A **DOI编码：**10.3969/j.issn.1006-1335.2014.03.007

Transfer Matrix Method for Analysis of Time-domain Response of Pipeline System

ZHANG Zhi-xin[1], *LIU Gong-min*[2], *LI Shuai-jun*[2]

(1. Military Representative Office of Navy in Harbin Turbine Co. Ltd., Harbin, 150046, China；
2. College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract : Based on the 12-equation model of fluid flow pipelines, constructing time-domain response functions by Fourier series expansion and applying the numerical inversion of Laplace transform to the transfer matrix method (TMM) for solution, the time-domain transient response simulation of pipelines is realized. The algorithm for solving time-domain steady response by undetermined coefficients method is employed, which can suppress the instability of the inverse Laplace transform in the solving process. To illustrate the practical implementation of the proposed methods, a pipeline system, which contains straight pipe, curved pipe, pipeline with elastic supports, and a cantilever pipe, is analyzed as an example, and the results are compared with those of finite element simulation. It is found that the results of proposed models and algorithm for the pipelines are close to the results of finite element simulation by means of ANSYS code. The feasibility of this method for solving the time-domain dynamics problems of the actual fluid-flow pipelines is validated.

Key words : vibration and wave ; time-domain response ; transfer matrix method ; inverse Laplace transform ; undetermined coefficients method

管路系统广泛应用于海洋工程、土木工程、水利工程、石油能源工业以及日常生活中。在管路系统中存在的泵和阀门等内部声源以及基础振动等外部激励，常会诱发管道的流固耦合振动，影响管路系统及相关动力系统的正常运行，并造成巨大的经济损失，因而输流管道流固耦合振动研究极具科学和工程价值。

特征线方法(MOC)是一种特别适用于简单管路系统时域数值求解方法，因此在流体管路系统的动力学研究中有相当多的应用[1—4]。如，Tijsseling基于流固耦合的4方程模型，对输流管道的时域响应进行了理论研究[1]，唐均、张洪明、王文全[2]和Keramat、Tijsseling等[3]对输流管道的水锤问题进行了计算和分析，范士娟、杨超分析了波速及管道阻尼对RPV输液管流固耦合振动的影响[4]。但MOC在求解多段管路系统存在不同特征线的相交以及插值误差等问题，对此研究人员发展了特征线—有限元法方法（MOC-FEM），MOC-FEM是通过有限元法求解管道运动，用特征线法求解流体运动，再通过接触

收稿日期：2013-08-08

作者简介：张志鑫（1984- ），男，黑龙江哈尔滨人，本科，目前主要从事船舶动力系统的研究。
E-mail: icegentleman@163.com

面的平衡条件实现流固耦合问题的求解 [5, 6]，尽管应用MOC-FEM求解输流管路动力学问题是一种可行的途径，但求解效率较特征线法低得多。

相比较而言，将管路运动或管内流体运动用多个1阶微分方程的形式进行描述，通过传递矩阵方法（TMM）求解更为简便可行 [7]。Dai Wang和Qian等利用传递矩阵方法计算，并分析了三维管道的固有频率及频率响应和管道的临界流速 [8]。柳贡民 [9] 等和李帅军 [10]等利用频域传递矩阵方法对输流管道动力学特性进行了分析。此外，李宝辉，高行山等人利用动刚度的方法计算了简支边界条件下单跨及多跨管道的固有频率 [11]。

随着研究的深入，频域TMM在求解管路系统的流固耦合的数学模型及计算方法的逐渐完善，但频域TMM无法获得结构上各点物理量随时间变化的情况，不能直观地了解各变量的时间历程及振幅等，虽然利用ANSYS等商业软件可以求解出输流管道的时域和频域响应，但过程相对繁琐，且在求解复杂管道时计算量大，在管道系统特性分析及其低噪声设计时不具有灵活性，而目前适用于时域响应理论分析的MOC需要经过时间离散与空间离散过程求解，较为复杂，且处理弹性支撑等结构困难，仅限于简单管道求解。鉴于此，本文在频域传递矩阵的基础上，通过Laplace逆变换将频域响应结果反演到时域，从而实现管道时域瞬态响应的计算，并利用待定系数方法对Laplace逆变换进行改进，得到了精确的时域稳态响应，最后通过算例验证了本文方法的正确性。

1 外部激励作用下的时域响应算法

1.1 时域瞬态响应算法

根据文献 [9]，不考虑流体的运动方程，任意管道结构均可用下述包含12个运动变量的状态向量表示

$$y(z,t)=[\dot{u}_z,\ f_z,\ \dot{w}_y,\ f_y,\ \dot{\theta}_x,\ m_x,\ \dot{w}_x,\ f_x,\ \dot{\theta}_y,\ m_y,\ \dot{\theta}_z,\ m_z]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中 角标x、y、z为坐标方向；$\dot{u}_z$ 为轴向振速，$\dot{w}$ 为管道的横向振速，$\dot{\theta}$ 为角速度，f为管壁内力，m为弯(扭)矩。

考虑管道的外部激励 $\bar{r}(z,t)$，则直管和弯管运动的12方程均可用下列矩阵形式表示 [9]

$$\bar{A}\frac{\partial y(z,t)}{\partial t}+B\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}+Cy(z,t)=\bar{r}(z,t) \tag{2}$$

文献[9，10]，对t进行Laplace变化，将时域的方程转换为拉氏域，结合管道边界条件及初始运动条件，管路系统最终可以写成下列矩阵形式

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{F} \tag{3}$$

其中 矩阵$\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}$是由管道系统边界条件、场传递矩阵和点传递组成的总体系数矩阵，$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{tot}}$ 是管道各考察点的状态向量组成的总体状态向量，F是管道激励与场传递矩阵和点传递矩阵共同作用的激励向量。

根据方程即可求得管路系统各考察点的频域动态响应向量 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{tot}}^{-1}\boldsymbol{F}$，由管道其他位置与考察点之间的传递关系就可以确定结构上任意点的频域响应 $\boldsymbol{\Phi}_N(z,s)$。

在求得频响 $\boldsymbol{\Phi}_N(z,s)$ 后，对某一频域变量 $F(s),(s=c+bi)$，其时域原函数 $y(t)$可以通过Laplace逆变换来求解，即

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{4}$$

将求 $y(t)$转化为一个广义积分问题，则 $y(t)$ 可以构造为如下所示的Fourier级数展开的计算 [12]

$$y(t)=\frac{e^{ct}}{T}\sum_{k=0}^{N}\left[\mathrm{Re}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\cos\frac{k\pi t}{T}-\mathrm{Im}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\right] \tag{5}$$

其中 c与T（$T>t$)为自由参数，N为级数截取项数；i为虚数单位，通常在 $T=2t$时，c与t乘积的取值应在1至4之间。此外，Dubner，Abate和Durbin先后建立了另外两个计算式 [12]

$$y_1(t)=\frac{2e^{ct}}{T}\left[\frac{1}{2}F(c)+\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\cos\frac{k\pi t}{T}\right] \tag{6}$$

$$y_2(t)=\frac{2e^{ct}}{T}\left[\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Im}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\right] \tag{7}$$

公式即为公式和公式的算术平均，$y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 的偏向相反，当c选择合理时，结果比较接近，即，$\left|y_1(t)-y_2(t)\right|$ 的值最小 [12]，因而可建立优化函数

$$\min_{c\in(0,\infty)}\left|\boldsymbol{\Phi}_f(t)\right| \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{\Phi}_f(t)=\frac{e^{ct}}{T}\sum_{k=0}^{N}\left[\mathrm{Re}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\cos\frac{k\pi t}{T}+\mathrm{Im}\,F\left(c+\frac{k\pi}{T}i\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\right]$$

通过公式，可求的c的最优值，进而利用公式可求得$y(t)$。

1.2 时域稳态响应算法

应用上节基于Fourier级数展开的Laplace逆变换法求解瞬态响应问题具有较高的精度，但其在求解连续激励下的稳态响应计算时，通常c与T的取值对求解结果影响较大，导致Laplace数值逆变换方法求解的结果不稳定。为解决这一问题，本文提出采用待定系数法计算结构稳态响应，计算方法如下。

首先将作用在管道上的外部激励力写成简谐力叠加的形式

$$f(t)=\sum_{n=1}^{N} f_n^a \cos(\omega_n t+\varphi_n) \tag{9}$$

相应地，管道的稳态响应可写为

$$y(t)=\sum_{n=1}^{N}\left[a_n \cos(\omega_n t)+b_n \sin(\omega_n t)\right] \tag{10}$$

其中 $y_n(t)=a_n \cos(\omega_n t)+b_n \sin(\omega_n t)$ 即为激励力的第 n 个频率分量 $f_n(t)=f_n^a \cos(\omega_n t+\varphi_n)$ 作用下产生的响应分量。在稳态响应计算中，将 $f(t)$ 进行 Laplace 变换

$$L[f(t)]=\sum_{n=1}^{N} f_n^a L[\cos(\omega_n t+\varphi_n)]=\sum_{n=1}^{N} F_n(s) \tag{11}$$

通过频域传递矩阵可分别求得管道在 $F_n(s)$，n =1，2，…N 作用下的频域响应分量 $\Phi_n(s)=\alpha_n+i\beta_n$。然后，将结构稳态响应分量 $y_n(t)$ 进行 Laplace 变换，则有下式成立

$$L[y_n(t)]=\frac{a_n s+b_n\omega_n}{s^2+\omega_n^2}=\Phi_n(s) \tag{12}$$

令 $s=c+i\omega_n$，且 $c \ll \omega_n$，则

$$L[y_n(t)]=\frac{a_n}{2c}-i\frac{b_n}{2c} \tag{13}$$

于是 $a_n=2c\alpha_n$，$b_n=-2c\beta_n$，计算时，c 可取 10^{-3} 或更小的正数。

按照上述步骤，即可分别确定各待定系数 a_n 与 b_n，进而确定各响应分量 $y_n(t)$，再将 $y_n(t)$ 叠加即可最终得到结构的稳态响应 $y(t)$。

2 算例验证及分析

2.1 时域瞬态响应算例

图 1 为两端固支的 Ω 形钢管系统。管道内径 d=98 mm，壁厚 δ=5 mm，不考虑管道阻尼，各弹簧支撑 x 方向垂直悬吊，弹簧刚度 k=4×10^5 m。初始时刻系统处于静止状态，激励点 C 于 t=0 时刻受到+x 方向瞬态激励，激励幅值和作用时间分别为 10^3 N 和 2 ms。

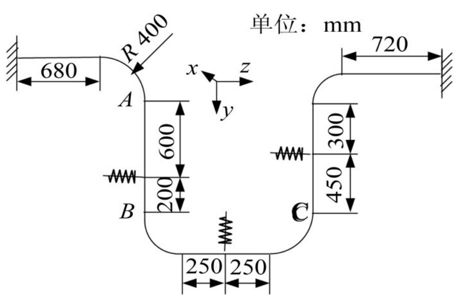


图 1 Ω 形管路系统示意图

TMM 与 Ansys 求得的 A、B、C 三点处 x 方向的位移的瞬态响应时间历程比较结果如图 2 所示。从图 2 可以看出，应用传递矩阵方法求解的冲击响应与有限元法求解结果的幅值、相位均吻合很好，因而验证了本文 12 方程模型及时域瞬态响应计算方法的正确性。

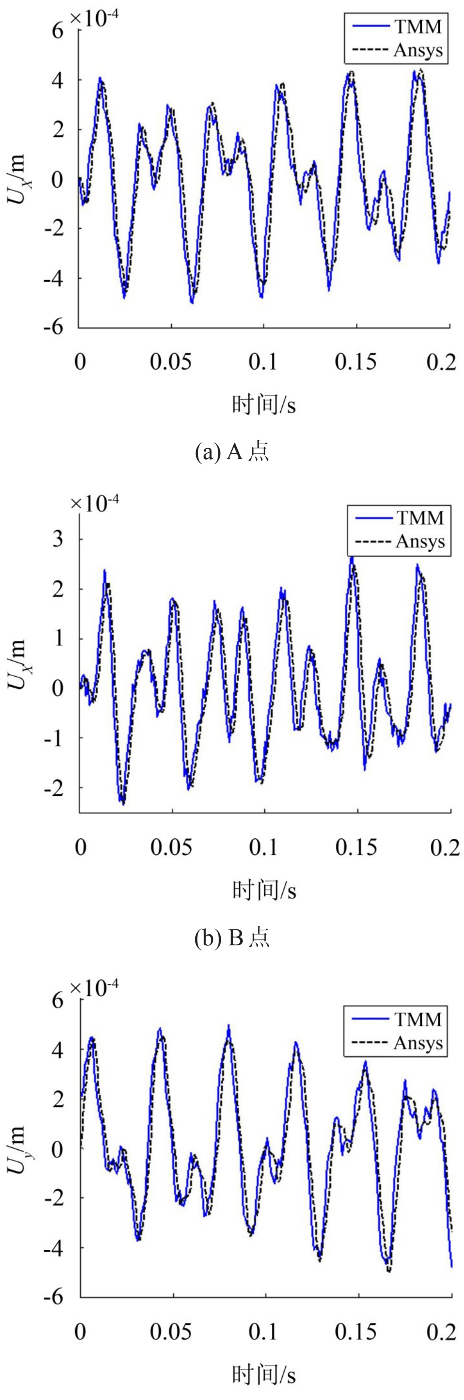


图 2 A、B、C 三点瞬态响应时间历程曲线

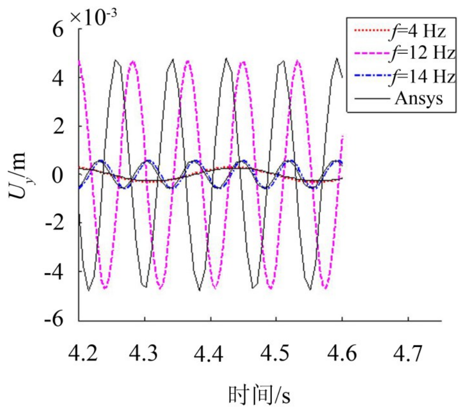
2.2 时域稳态响应算例

以一悬臂直管系统为例，验证本文稳态响应计算的正确性。例中直管内径 d =100 mm，壁厚 δ=4 mm，长度 L=3 m。悬臂梁结构阻尼比为 C_d= 0.02，第 1 阶固有频率为 11.85 Hz，自由端受到 F=

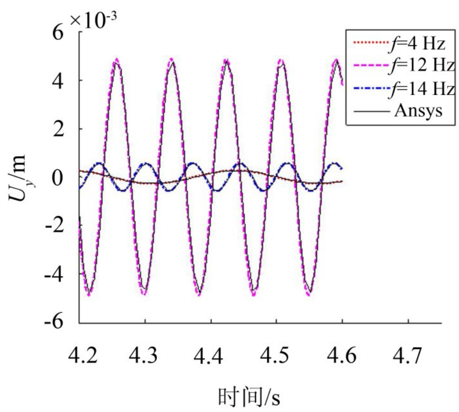
100 sin(2 π*ft*) *N*的正弦激励，其中 *f* 为激励频率。

应用Laplace逆变换和待定系数传递矩阵法与Ansys求得的不同频率的正弦激励下自由端位移稳态响应的时间历程比较结果如图3所示。

由图3(a)可以看出，Laplace逆变换与Ansys计算的稳态响应幅值仍保持一致，但当激励力频率与固有频率接近时，两种方法计算的相位存在明显的差异，说明Laplace数值逆变换法在求解稳态响应问题时存在一定的差异，并且这种差异在管路系统产生共振时尤为明显。图3(b)所示对比结果表明，待定系数法与Ansys计算的稳态响应不仅幅值一致，且相位也吻合良好，验证了待定系数法求解结构稳态响应问题的有效性。与Laplace逆变换法相比，应用待定系数法求解结构稳态响应问题计算过程简便，计算效率高得多，且避免了Laplace逆变换的计算不稳定问题，求解结果更加可靠。



(a) Laplace逆变换与ANSYS计算结果比较



(b) 待定系数法与ANSYS计算结果比较

图3 自由端稳态响应时间历程

3 结 语

本文基于输流管道12方程数学模型，通过构造傅里叶级数展开形式的原函数，将传递矩阵计算的频域响应结果通过Laplace数值逆变换反演到了时域，进而计算了管路系统的时域瞬态响应；并通过待定系数法求解了管路系统的时域稳态响应，解决了Laplace逆变换在求解时域稳态响应不稳定的问题。

传递矩阵方法在求解输流管道时域响应问题的成功应用，说明该方法不仅可用于管路系统的频域响应求解，还可以直观地获得各变量的时间历程及振幅等，从而拓展了传递矩阵方法的应用范围。此外，利用传递矩阵法求解管路系统时域响应的求解效率明显高于有限元方法，这对于实际工程中复杂管路系统的冲击响应研究具有很大的意义。

参考文献：

[1] Tijsseling A S. Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration[J]. **Journal of Fluids and Structures**, 2003, 18(1): 179-196.

[2] 唐　均，张洪明，王文全. 长距离有压输水管道系统水锤分析[J]. **水电能源科学**，2010，28(2)：82-84.

[3] Keramat A, Tijsseling A S, Hou Q, Ahmadi A. Fluid-structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer[J]. **Journal of Fluids and Structures**, 2012, 28(1): 434–455.

[4] 范士娟，杨　超. 输水管道流固耦合振动数值计算[J]. **噪声与振动控制**，2010，6：43-46.

[5] Ahmadi A, Keramat A. Investigation of fluid–structure interaction with various types of junction coupling[J]. **Journal of Fluids and Structures**, 2010, 26(1): 1123-1141.

[6] Achouyab E H, Bahrar B. Numerical modeling of phenomena of water hammer using a model of fluid-structure interaction[J]. **Comptes Rendus Mecanique**, 2011, 339(1): 262-269.

[7] LIU Gong-min, LI Yan-hua. Vibration analysis of liquid-filled pipelines with elastic constraints[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2011, 330(1): 3166-3181.

[8] Dai H L, Wang L, Qian Q, Gan J. Vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid with consideration of steady combined force by transfer matrix method[J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2012, 219(1): 2453-2464.

[9] 柳贡民，陈　浩，李帅军. 蒸汽参数对管路系统动力特性的影响研究[J]. **固体力学学报**，2012，33(2)：168-175.

[10] 李帅军，柳贡民，陈　浩. 考虑流固耦合管内压力波传递特性分析[J]. **振动与冲击**，2012，31(24)：177-182.

[11] LI Bao-hui, GAO Hang-shan, ZHAI Hong-bo, LIU Yong-shou, YUE Zhu-feng. Free vibration analysis of multi-span pipe conveying fluid with dynamic stiffness method [J]. **Nuclear Engineering and Design**, 2011, 241(1): 666-671.

[12] 彭　凡，陈耀军，刘一凡，傅衣铭. 基于Fourier级数展开的Laplace数值逆变换[J]. **力学学报**，2008，40(2)：215-221.