

文章编号: 1006-1355(2014)02-0133-03

拉索非线性随机振动的最优有界半连续控制

张 巍¹, 应祖光², 胡荣春²

(1. 浙江理工大学 经济管理学院实验中心, 杭州 310018;

2. 浙江大学 航空航天学院 力学系, 杭州 310027)

摘 要: 研究斜拉索非线性随机振动的最优有界半连续控制。建立受控拉索的横向非线性运动方程, 运用伽辽金法推导多模态耦合的振动方程; 考虑控制力的有界性, 建立多自由度非线性索系统的随机最优控制问题方程, 应用随机平均法、动态规划原理与变分原理确定 HJB 方程并得到最优有界半连续控制律, 最后通过数值结果说明该最优控制对于斜拉索非线性随机振动能够达到较好的实际控制效果。

关键词: 振动与波; 最优控制; 有界控制力; 非线性随机振动; 拉索

中图分类号: O32; TU311

文献标识码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2014.02.030

Optimal Bounded Semi-continuous Control of Nonlinear Random Vibration of Taut Cables

ZHANG Wei¹, YING Zu-guang², HU Rong-chun²

(1. Laboratory Center, School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract : The optimal bounded semi-continuous control of nonlinear random vibration of an inclined taut cable is studied. The nonlinear equation for transverse motion of the cable with control and excitation is derived and then converted into the vibration equations with multi-modal coupling by using Galerkin method. Considering the limitation of the control force, the equation for the random optimal control of the nonlinear cable system with multi-degree-of-freedom is established. Then, the HJB equation is determined, and the optimal bounded semi-continuous control law is obtained based on the random averaging method, dynamical programming principle and variational principle. Numerical results show that the proposed control method has good effect for the nonlinear random vibration control of the cables.

Key words : vibration and wave ; optimal control ; bounded control force ; nonlinear random vibration ; cable

拉索是斜拉桥、大跨度索支撑结构等的重要构件^[1], 但因抗弯和抗压刚度低而易于受环境激励产生大幅振动, 需要进行振动控制研究。拉索确定性振动的主动和半主动控制已有一定研究^[2-5]。然而, 环境激励如风力、基础运动等通常具有随机性, 斜拉索随机振动的最优控制研究相对缺乏^[6]。而且, 拉索随机振动的不确定性可能导致很大幅度运动, 但

实际主动和半主动控制器的控制力大小都有一定限制^[7], 因此无法产生相应大的反馈控制力, 从而退化按无界设计的控制效果, 考虑控制力有界性的斜拉索非线性随机振动的最优控制研究尚有待于发展。

随机动态规划原理是确定系统非线性随机振动最优控制的一个基本理论, 它将最优控制设计转化为求解动态规划(HJB)方程, 应用变分原理可确定有界约束的最优控制^[8]。bang-bang 控制是一个常用的有界控制, 但因系统响应的随机性而导致相应控制的不连续性, 将产生受控系统的颤振, 严重退化控制效果^[9]。本文建立受控斜拉索的横向非线性运动方程, 运用伽辽金法推导多模态耦合的振动方程; 然后考虑系统激励的随机性与控制力的有界性, 先后

收稿日期: 2013-06-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072215)

作者简介: 张 巍(1965-), 女, 江苏南通人, 高级工程师, 学士, 主要从事信息系统与控制研究。

E-mail: zhweihz@zstu.edu.cn

应用随机平均法、动态规划方法与变分法确定最优有界半连续控制律;最后通过数值结果说明控制效果。

1 受控斜拉索的非线性振动方程

考虑张紧的弹性斜拉索^[5],在铅直平面内横向激励与控制力作用下,其横向运动方程为^[1]

$$m\ddot{v} + c_v \dot{v} = (T + EA\varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{dT}{ds} \frac{\partial v}{\partial s} + EA\varepsilon \frac{d^2 n}{ds^2} + f_v \quad (1)$$

式中 v 是横向位移, s 是曲线坐标, m 是单位长度质量, c_v 是阻尼系数, T 是静张力, EA 是拉伸刚度, ε 是非线性动应变^[4], n 是单位法向矢量, f_v 包含横向激励和控制力。设索两端固定,则边界条件为 $s=0, L$ (索长) 时, $v=0$ 。利用非线性应变与张力表达式、静平衡关系,并作无量纲化,式(1)成为

$$\ddot{w} + c\dot{w} - \{k_1 - k_2 z + \int_0^1 [k_3 w + k_5 (\frac{\partial w}{\partial z})^2] dz\} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial z} + \int_0^1 [k_4 w + \frac{1}{2} k_3 (\frac{\partial w}{\partial z})^2] dz = f \quad (2)$$

相应边界条件为 $z=0, 1$ 时, $w=0$, 其中无量纲位移 $w=v/L$, 坐标 $z=s/L$, 斜拉索的倾斜角为 α , 水平静张力为 T_x , $c=c_v/m$, $f=f_v/(mL)$

$$k_1 = \frac{T_x}{mL^2 \sin \alpha} + \frac{k_2}{2}, \quad k_2 = \frac{g \cos \alpha}{L \sin^2 \alpha} \\ k_3 = \frac{EA g}{T_x L}, \quad k_4 = \frac{EA}{m} (\frac{mg}{T_x})^2, \quad k_5 = \frac{EA}{2mL^2} \quad (3)$$

将无量纲位移展成

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \sin k\pi z \quad (4)$$

它满足索两端边界条件, 其中 q_k 为模态位移。考虑到索的模态振动幅值随模态阶次升高而迅速降低, 保留到前3阶模态。将式(4)代入(2), 运用伽辽金法, 可得索的模态振动方程

$$\ddot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 + [\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2) + \frac{8}{\pi^2}k_4]q_1 + \frac{40}{9}k_2 q_2 + \frac{8}{3\pi^2}k_4 q_3 + 3\pi k_3 q_1^2 + \frac{2\pi}{3}k_3 q_1 q_3 + 4\pi k_3 q_2^2 + 9\pi k_3 q_3^2 + \quad (5)$$

$$\frac{\pi^4}{2}k_5(q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_1 = \frac{4}{\pi}\xi + 2u \sin \pi z_c \\ \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 + 4\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2)q_2 + \frac{40}{9}k_2 q_1 + \frac{312}{25}k_2 q_3 + 8\pi k_3 q_1 q_2 + \frac{8}{3}\pi k_3 q_2 q_3 + 2\pi^4 k_5 \cdot \quad (6)$$

$$(q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_2 = 2u \sin 2\pi z_c \\ \ddot{q}_3 + c_3 \dot{q}_3 + [9\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2) + \frac{8}{9\pi^2}k_4]q_3 + \frac{312}{25}k_2 q_2 + \frac{8}{3\pi^2}k_4 q_1 + \frac{\pi}{3}k_3 q_1^2 + \frac{4\pi}{3}k_3 q_2^2 + \quad (7)$$

$$18\pi k_3 q_1 q_3 + 9\pi k_3 q_3^2 + \frac{9\pi^4}{2}k_5(q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_3 = \frac{4}{3\pi}\xi + 2u \sin 3\pi z_c$$

式中 $c_i=2z_i w_i$, z_i 是阻尼比, $\omega_i=i\pi\sqrt{k_1+k_2/2}$, z_c 是控制力 u 的位置坐标, x 是随机激励, 设为高斯白噪声。

2 最优有界半连续控制力

将式(5)~(7)表示成 $It\delta$ 微分的状态方程

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \\ dp_i = (-\frac{\partial H}{\partial q_i} - c_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + u_i) dt + \sigma_{ik} dB_k(t) \quad (8)$$

式中 $H=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)/2+U(q_1, q_2, q_3)$, p_i 是广义动量, U 是广义势, B_k 是单位 Wiener 过程, $\sigma_{ik}\sigma_{jk}=2D_k\delta_{ij}$, D_k 是激励强度, $d_i=1$ ($i=1, 2, 3$), u_i 是相应于 q_i 的广义控制, 具有一定的界限

$$|u_i| \leq b_i \quad (9)$$

式中 b_i 是正常数。应用随机平均法于式(8), 得到平均系统方程

$$dH = [\tilde{m}(H) + \langle u_i p_i \rangle] dt + \tilde{\sigma}(H) dB(t) \quad (10)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 是平均算符, \tilde{m} 是漂移系数, $\tilde{\sigma}$ 是扩散系数。系统(10)最优控制的性能指标表示为

$$J(u_i) = E[\int_0^{t_f} \{g(H) + \langle u^T R u \rangle\} dt] \quad (11)$$

式中 $E[\cdot]$ 是期望算符, t_f 是控制的终时, $R = \text{diag}[R_1, R_2, R_3]$, $u = [u_1, u_2, u_3]^T$, $g(H) \geq 0$ 。根据随机动态规划原理, 建立系统(10)和指标(11)的平稳 HJB 方程

$$\min_{u_i} \{ \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{d\lambda}{dH} + (\tilde{m} + \langle u_i p_i \rangle) \lambda + g + \langle u^T R u \rangle \} = 0 \quad (12)$$

式中 λ 是 H 的函数。式(12)与(9)组成具有控制约束的动态规划问题, 根据变分原理, 可得最优控制律

$$u_i^* = \begin{cases} -\lambda p_i / (2R_i) & |\lambda p_i / (2R_i)| \leq b_i \\ -b_i \text{sgn}(\lambda p_i) & |\lambda p_i / (2R_i)| \geq b_i \end{cases} \quad (13)$$

该控制具有界限 b_i , 在界内具有连续函数形式, 因此是一种有界半连续型的最优控制。其连续性优于非连续的 bang-bang 控制, 从而可减轻非连续控制产生的颤振效应。将式(13)代入(12)求解之得到1, 代回(13)即得非线性索系统的最优有界半连续控制。应用随机平均法可计算系统(8)控制前后的响应。

3 数值结果

考虑某受控斜拉索, 具有参数 $L=130.0$ m, $\alpha=0.984$ rad, $A=60.0$ cm², $m=60.0$ kg/m, $z_c=0.002$, $E=180$ GPa, $T_x=4\,000 \sin \alpha$ kN, $D_1=D_2=D_3=0.03$, $z_c=0.9$, $b=2.2$, $R=4.0 \sin i \pi z_c$, $g=2 H^2$ 。按照式(13)确定最优有界控制, 计算受控索的均方位移, 同时计算未控索的均方位移, 得到相对降低值, 并计算它与均方控

制之比,用以说明控制效率。作为比较,给出 bang-bang 控制均方位移的相对降低值,及其与均方控制之比。数值结果如图 1、2 所示,最优有界半连续控制的位移相对降低值随控制界限而提高($b=2.5$ 时约为 88%),其值略小于 bang-bang 控制($b=2$ 时两者之差约为 0.02),但差距随控制界限提高而缩小,其控制效率则高于 bang-bang 控制。图 3、4 展示的样本表明最优有界半连续控制力的连续性远优于 bang-bang 控制力,从而能较大程度地减轻后者产生的颤振效应,改善实际控制效果。

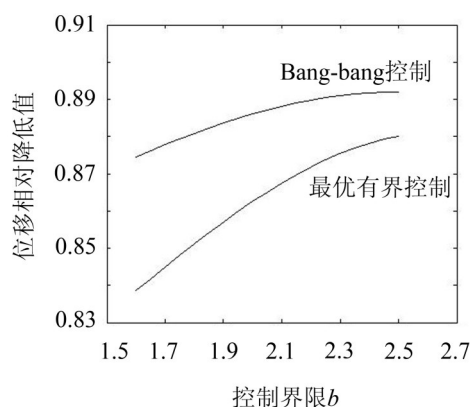


图 1 均方位移的相对降低值($b=b_c$)

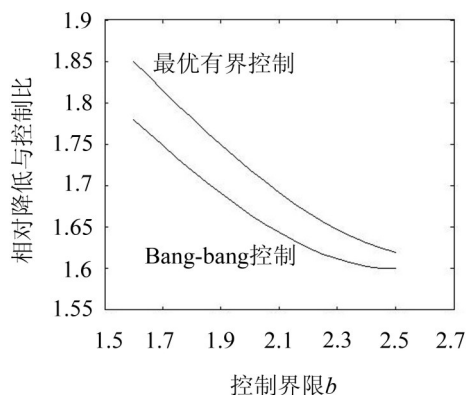


图 2 位移相对降低值与控制力之比($b=b_c$)

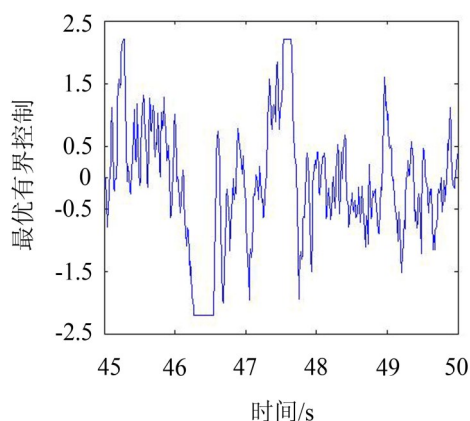


图 3 最优有界控制力样本

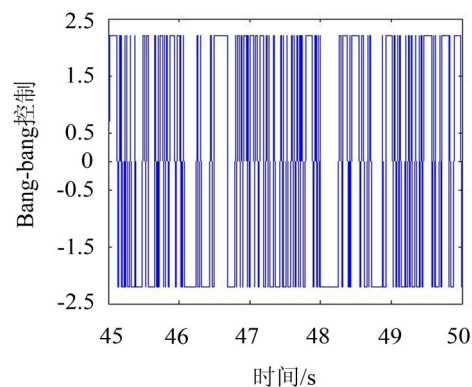


图 4 Bang-bang 控制力样本

4 结 语

综合应用随机平均法、动态规划原理与变分原理研究了考虑控制力有界性的斜拉索非线性随机振动的最优控制问题。建立了受控斜拉索多模态耦合的横向非线性振动方程,应用随机平均法得到平均方程,应用动态规划方法建立 HJB 方程,应用变分法得到了非线性随机索系统的最优有界控制律。该非线性随机振动的最优有界半连续控制具有较高的效率与连续性,更切合实际控制器情况,数值结果表明能达到较好的实际控制效果。

参考文献:

- [1] Irvine H M. Cable Structures[M]. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [2] Diouren T L, Fujino Y, Abe M. Control of wind-induced self-excited oscillations by transfer of internal energy to higher modes of vibration I: analysis in two degree of freedom[J]. *ASCE J. Eng. Mech.*, 2003, 129: 514-525.
- [3] Zhou H J, Xu Y L. Wind-rain-induced vibration and control of stay cables in a cable-stayed bridge [J]. *Struct. Cont. Health Moni.*, 2007, 14: 1013-1033.
- [4] Ying Z G, Ni Y Q, Ko J M. Parametrically excited instability analysis of a semi-actively controlled cable[J]. *Eng. Struct.*, 2007, 29: 567-575.
- [5] 张 巍, 应祖光, 王建文. 风激拉索张弛振荡的最优控制分析[J]. *噪声与振动控制*, 2012, 32(3): 21-24.
- [6] Zhao M, Zhu W Q. Stochastic optimal semi-active control of stay cables by using magneto-rheological damper[J]. *J. Vib. Cont.*, 2011, 17: 1921-1929.
- [7] Spencer B F, Dyke S J, et al. Phenomenological model for magneto-rheological dampers[J]. *ASCE J. Eng. Mech.*, 1997, 123: 230-238.
- [8] Ying Z G, Ni Y Q, Ko J M. A bounded stochastic optimal semi-active control [J]. *J. Sound Vib.*, 2007, 304: 948-956.
- [9] Chitour Y, Liu W, Sontag E. On the continuity and incremental- gain properties of certain saturated linear feedback loops[J]. *Int. J. Robust Nonlin. Cont.*, 1995, 5: 413-440.