

文章编号: 1006-1355(2014)02-0034-07

采用分层理论计算层合板的固有频率和振型

赵 飞 , 吴锦武 , 赵龙胜

(南昌航空大学 飞行器工程学院, 南昌 330063)

摘要:采用有限元方法并结合分层理论对复合材料层合板的固有频率和振型进行理论计算,再用实验验证。通过分层有限元模型求解层合板的位移模式,对层合板固有频率进行计算。分析有限元网格数,铺设角度、铺设层数等对固有频率的影响,获得层合板自由振动的前九阶振型,采用实验进行了验证。结果表明,提出的方法可较精确计算层合板的固有频率和振型。

关键词:振动与波; 层合板; 分层理论; 有限元; 固有频率; 振型

中图分类号: TB332; TH113.1

文献标志码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1006-1335.2014.02.008

Analysis for Natural Frequencies and Mode Shapes of Laminated Composite Plates Using Layerwise Theory

ZHAO Fei, WU Jin-wu, ZHAO Long-sheng

(School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract : A detailed simulation of natural frequencies and mode shapes of laminated composite plates is presented based on the layerwise theory and the corresponding finite element method. The influence of finite element mesh size, fiber orientation, ply number, etc. on the natural frequencies of a laminated plate is analyzed. And its natural frequencies of the first 9 orders are obtained. The simulation result is verified by the experiment. Consequently, the applicability and the effectiveness of the present method for accurately computing the natural frequencies of laminated composite plates are demonstrated.

Key words : vibration and wave ; laminated composite plates ; layerwise theory ; finite element method ; natural frequency ; mode shape

由于高性能纤维和高性能基体组成的复合材料的力学特性十分突出,复合材料层合板结构已日益广泛的运用于航空航天等许多领域^[1,2],相关的层合板振动特性的分析日益增多,研究成果不断涌现。其中主要有经典理论(Classical Laminated Plate Theory, CLPT),1阶剪切理论^[3](First-order Shear Deformation Theory, FSDT),高阶剪切理论^[4,5](High-order Shear Deformation Theory, HSDT),而高阶剪切理论又可分为3阶剪切理论^[6](Third-order shear deformation theory, TSDT),三角剪切理论^[7]

(Trigonometric shear deformation plate theory, TSDPT)和双曲线剪切理论^[8](Hyperbolic shear deformation plate theory, HSDPT)。各种理论都有其特点和局限性,如经典理论忽略了板横向剪切变形,分析中厚板会导致位移和应力偏小和固有频率偏高^[9];1阶剪切理论中剪切力及其应变在厚度方向为常数,这与板壳理论中应呈抛物线分布不符。高阶剪切理论多用于层间应力分析,一般的高阶方法精度较高,且要像1阶剪切理论那样引入剪切修正系数,求解过于繁琐^[10]。分层理论(Layerwise theory, LT)^[11]采取在板的厚度方向取线性插值或二次插值函数来描述每个数值层内位移沿厚度方向的变化规律,可视为准三维理论,有着较高的精度。分层理论对厚板的求解效果比较好,而分析薄板时,如果结合有限元方法,采取缩减积分可及时避免剪切自锁,达到较好的求解效果。另外结合有限元方法还可适应

收稿日期: 2013-05-17

项目基金: 国家自然科学基金项目(基金编号: 51265038);

航空科学基金项目(基金编号: 2011ZA56002)

作者简介: 赵 飞(1987-), 男, 山东东营人, 研究生, 目前从事复合材料振动与噪声研究。

Email: grefei@126.com

不同的边界条件,有效的解决边界条件造成的求解精确解困难的问题。

采用分层理论结合有限元方法分析层合板的固有频率,分析该方法的精度与有限元网格数的关系;探讨层合板铺设层数,铺设角度对固有频率的影响,求解层合板振动的前九阶振型,最后通过实验进行验证。

1 分层理论简介

层合板结构的结构模型如图1,其中n为层合板层数。

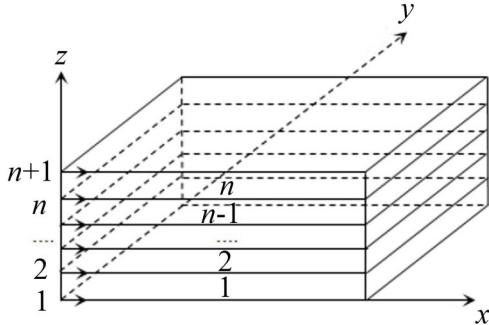


图1 层合板的结构模型

根据Reddy分层理论^[11],层合板结构的位移场可表示为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^N u_I(x,y,t) \Phi^I(z) \\ v(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^N v_I(x,y,t) \Phi^I(z) \\ w(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^N w_I(x,y,t) \Phi^I(z) \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)中 $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ 分别为 x,y,z 方向位移, n 为铺设层数, N 为插值层数, $N=n+1$; $u_I(x,y,t)$, $v_I(x,y,t)$, $w_I(x,y,t)$ 为第 I 个插值平面内 x,y,z 方向的位移, $\Phi^I(z)$ 为插值展开函数,其取值为

$$\begin{aligned} \Phi^I(z) &= \psi_1^{(I)}(z), \quad z_1 \leq z \leq z_2 \\ \Phi^I(z) &= \begin{cases} \psi_2^{(I-1)}(z), & z_{I-1} \leq z \leq z_I \\ \psi_1^{(I)}(z), & z_I \leq z \leq z_{I+1} \end{cases} \\ \Phi^N(z) &= \psi_2^{N_1}(z), \quad z_{N-1} \leq z \leq z_N \\ (I &= 2, 3, \dots, n+1) \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\psi_1^{(k)} = 1 - \frac{\bar{z}}{h_k}, \quad \psi_2^{(k)} = \frac{\bar{z}}{h_k}, \quad 0 \leq \bar{z} \leq h_k$$

式(2)中 $n+1$ 为插值层数, h_k 表示层合板的第 k 层铺设层的厚度, $\bar{z}=z-z_i^k$, z_i^k 表示相对于第 k 层底部的 z 方向坐标。根据有限元理论,式(1)中 $u_I(x,y,t)$, $v_I(x,y,t)$, $w_I(x,y,t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} u_I(x,y,t) &= \sum_{k=1}^m N_k(x,y) u_k T(t) \\ v_I(x,y,t) &= \sum_{k=1}^m N_k(x,y) v_k T(t) \\ w_I(x,y,t) &= \sum_{k=1}^m N_k(x,y) w_k T(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中 m 为有限元单元节点数。 $N_k(x,y)$ 为形函数, u_k, v_k, w_k 为有限元节点 k 处的 x, y, z 方向的位移, $T(t)$ 为时间函数。文中采用四节点矩形单元。结合式(2),可得单元形函数矩阵 \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = [N_{11}, N_{12}, \dots, N_{lk}, \dots, N_{38}] \quad (l=1,2,3; k=1,2,\dots,8) \quad (4)$$

其中

$$N_{lk} = \begin{bmatrix} N_k \phi_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & N_k \phi_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & N_k \phi_{ik} \end{bmatrix}$$

N_k 为四节点矩形单元的形函数,其表达式见文献^[12]。根据弹性力学位移—应变关系,可得到单元应变矩阵

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \dots, \mathbf{B}_{lk}, \mathbf{B}_{38}] \quad (l=1,2,3; k=1,2,\dots,8) \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{B}_{lk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \phi_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \phi_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & N_k \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial z} \\ 0 & N_k \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \phi_{ik} \\ N_k \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} \phi_{ik} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \phi_{ik} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \phi_{ik} & 0 \end{bmatrix}$$

正交异性材料的应力—应变关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)中 C_{ij} 的表达式见文献[13],下标1表示纤维方向;2表示与纤维相垂直的方向;3表示厚度方向。 σ_1, σ_2 表示材料主轴上的正应力; $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$ 为切应力。根据转轴公式,当 x, y, z 坐标系与材料主轴坐标存在偏轴角时,第 K 层位移应变关系可以表达为^[13]

$$[\sigma]_k = [\mathbf{D}]_k \times [\varepsilon]_k \quad (7)$$

式(7)中 \mathbf{D} 为刚度矩阵,表达式见文献^[13]。通过式(5)和式(7),单元刚度矩阵 \mathbf{K} 和单元质量矩阵 \mathbf{M} 可以表示为

$$\mathbf{K} = \iiint_V B^T D B dx dy dz \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = \iiint_V \rho N^{*T} N dx dy dz \quad (9)$$

将单元刚度矩阵 \mathbf{K} 、单元质量矩阵 \mathbf{M} ，单元节点力 \mathbf{F} 按照网格划分组装后可得到总动力方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (10)$$

无阻尼时各阶振型及固有频率可由 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = 0$ 求得。

2 数值模拟

为了验证有限元的分层理论在计算层合板固有频率上的准确性,本文采用四边简支正方形层合板结构作为分析对象。引入无量纲频率 $\xi_1 = (\rho h \omega^2 a^4 / D_{0,1})$, 其中 ω 为层合板固有频率, $D_{0,1} = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})$ 。

2.1 有限元网格收敛性分析

以三层铺设的 T300 石墨/环氧复合材料层合板为例,其长度为 $a=b=10\text{m}$, 层合板总厚度为 $h=0.06\text{m}$, 层合板密度为 $\rho=1760\text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E_1/E_2=2.45$, $G_{12}/E_2=0.48$, 泊松比 $\nu_{12}=0.23$ 。表 1 为层合板结构在 $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ 铺设, 四边简支条件下, 有限元网格数分别为 12×12 , 36×36 , 60×60 , 96×96 , 120×120 时无阻尼前六阶无量纲固有频率; 并与文献 [14] 精确解析解进行对比。从表 1 中能看出, 随着网格数的增加, 无量纲固有频率逐渐的收敛于精确解。网格数划分越精细, 精确性越好; 但是随着网格数的增加, 计算量相应的增倍。因此以下算例均采用 60×60 网格数。

表 1 三层($0^\circ, 0^\circ, 0^\circ$)铺设四边简支层合板前六阶无量纲固有频率

Mode	Mesh size (error)					Exact [14]
	12×12 (%)	36×36 (%)	60×60 (%)	96×96 (%)	120×120 (%)	
1	16.347 (7.8)	15.595 (2.8)	15.430 (1.7)	15.336 (1.1)	15.305 (0.9)	15.171
2	35.986 (8.2)	34.213 (2.9)	33.849 (1.8)	33.643 (1.2)	33.574 (1.0)	33.248
3	48.224 (8.6)	45.668 (2.9)	45.168 (1.8)	44.888 (1.1)	44.795 (0.9)	44.387
4	64.919 (7.0)	62.278 (2.6)	61.666 (1.6)	61.308 (1.0)	61.187 (0.8)	60.682
5	70.710 (9.7)	66.460 (3.1)	65.694 (1.9)	65.375 (1.4)	65.137 (1.0)	64.457
6	95.922 (6.4)	92.482 (2.6)	91.603 (1.6)	91.082 (1.0)	90.903 (0.8)	90.145

2.2 铺设层数、板厚的影响

表 2、3 分别四边简支和四边固定边界条件得到三层层合板结构的无量纲固有频率, 同时与 3 阶剪切理论 TSDT^[15] 和经典层合板理论 CLPT^[15] 的结果进行比较。从表 2 和表 3 可知: 1) 有限元分层理论可以适用于各种边界条件板结构。2) 对于薄板而言, 有限元分层理论和 3 阶剪切理论所求的无量纲固有频率大于经典层合板理论所求的无量纲固有频率。

表 4 表示层合板总厚度 $h=3\text{ m}$ 时, 三层简支层合板无量纲固有频率。由表 2 和表 4 对比可知, 当板结构厚度增加时, 经典层合板理论所求的无量纲固有频率大于分层理论和 3 阶剪切理论, 高阶无量纲固有频率尤其明显; 这也说明经典层合板理论只适用于薄板, 当板厚度增加时所求无量纲固有频率偏大; 而分层理论在不同的跨厚比下都获得较精确的无量纲固有频率。

表 5 和 6 分别为层合板总厚度 $h=0.06\text{ m}$ 时四层和五层不同边界条件下层合板无量纲固有频率, 其中 CCCC 为四边固支边界条件, SSSS 为四边简支边界条件。从表 5 和 6 可知: 在厚度不变的情况下相同铺设角度下铺设层数的变化对无量纲固有频率的影响比较小。

2.3 振型分析

选取 $[0^\circ]_6$ 铺设的四边固支正方形层合板, 长、宽为 $a=b=0.28\text{ m}$, 厚度 $h=0.002\text{ m}$, 密度 $\rho=1760\text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E_1=45\text{ Gpa}$, $E_2=12.9\text{ Gpa}$, 泊松比 $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.28$, 剪切模量 $G_{12}=4.6\text{ Gpa}$ 。

表 2 三层四边简支层合板无量纲固有频率 ($h = 0.06$)

Three-ply	Method	Mode					
		1	2	3	4	5	6
$(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	TSDT [15]	15.22	33.76	44.79	661.11	66.76	91.69
	CLPT [15]	15.17	33.32	44.51	60.78	64.79	90.42
	Present	15.43	33.85	45.17	61.67	65.69	91.60
$(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ)$	TSDT [15]	15.45	34.54	44.25	61.36	68.68	92.99
	CLPT [15]	15.40	34.12	43.96	60.91	66.92	91.76
	Present	15.63	34.62	44.31	62.23	67.01	92.32
$(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$	TSDT [15]	15.92	36.28	43.00	62.05	73.55	87.37
	CLPT [15]	15.87	35.92	42.70	61.53	71.10	86.31
	Present	16.25	37.10	42.93	64.34	72.09	86.61
$(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$	TSDT [15]	16.15	37.33	42.20	62.45	78.96	81.55
	CLPT [15]	16.10	37.00	41.89	61.93	77.99	80.11
	Present	16.56	39.07	41.50	65.42	78.75	79.59

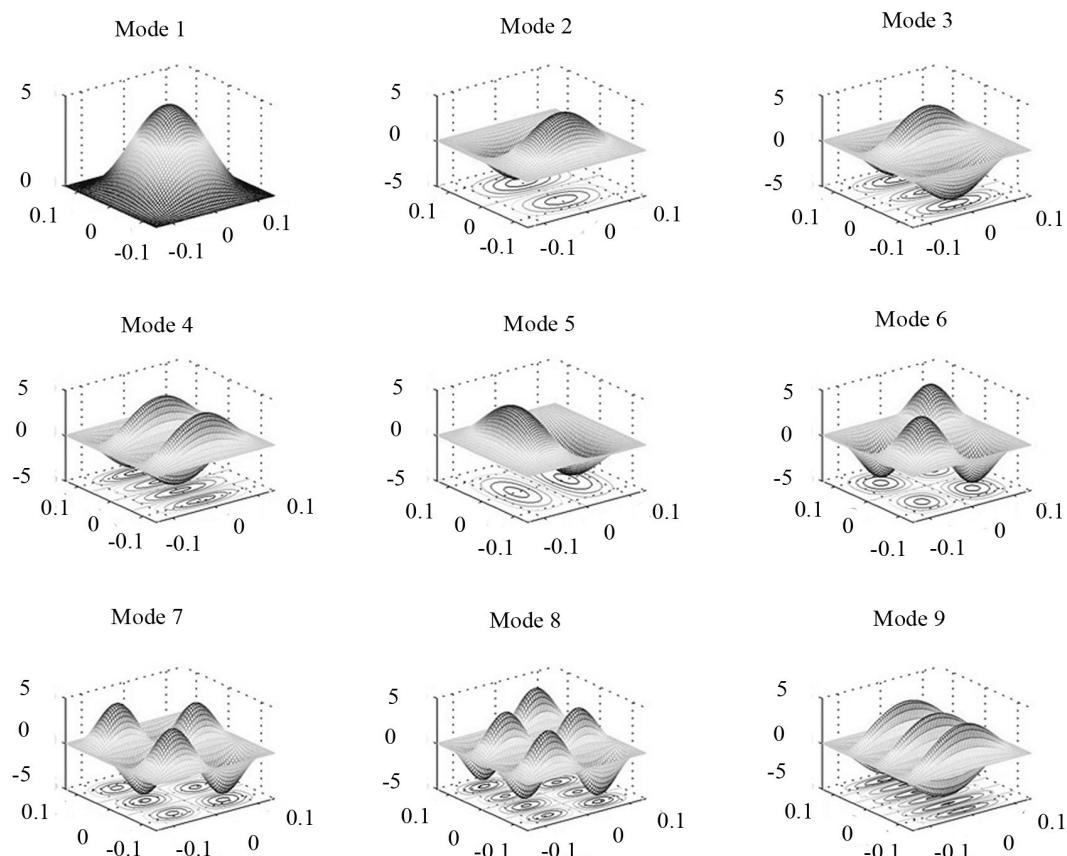


图 2 前 9 阶振型图

表3 三层四边固支层合板无量纲固有频率 ($h = 0.06$)

Three-ply	Method	Mode					
		1	2	3	4	5	6
$(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	TSDT [15]	30.02	54.68	70.41	89.36	92.58	123.6
	CLPT [15]	29.27	51.21	67.94	86.25	87.97	119.3
	Present	29.39	51.35	67.92	86.45	88.06	119.6
$(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ)$	TSDT [15]	29.85	55.25	69.14	88.53	94.92	124.3
	CLPT [15]	29.07	51.83	66.55	85.17	90.56	120.0
	Present	29.29	52.23	66.65	86.63	90.17	121.79
$(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$	TSDT [15]	29.51	56.84	66.17	87.83	100.5	118.9
	CLPT [15]	28.69	53.57	63.26	84.43	96.15	115.5
	Present	29.09	54.72	63.36	87.49	95.84	115.43
$(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$	TSDT [15]	29.34	58.19	64.14	87.67	107.38	110.6
	CLPT [15]	28.50	55.11	60.94	84.25	103.2	106.7
	Present	28.99	57.38	60.28	87.99	104.17	105.58

表4 三层四边固支层合板无量纲固有频率 ($h = 3$)

Three-ply	Method	Mode					
		1	2	3	4	5	6
$(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$	TSDT[15]	11.71	22.13	25.38	32.58	35.79	40.89
	CLPT[15]	14.16	38.03	48.18	49.11	64.55	73.01
	Present	11.05	21.18	24.58	31.08	34.65	39.92
$(15^\circ, -15^\circ, 15^\circ)$	TSDT[15]	11.84	22.38	25.29	32.74	36.13	40.56
	CLPT[15]	14.37	37.54	47.93	51.03	65.39	74.67
	Present	11.14	21.47	24.76	31.33	35.06	39.79
$(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$	TSDT[15]	12.10	22.97	25.03	33.07	37.06	39.66
	CLPT[15]	14.80	30.65	36.44	48.34	54.91	65.47
	Present	11.31	22.25	24.36	31.84	36.17	39.21
$(45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$	TSDT[15]	12.24	23.36	24.80	33.24	38.20	38.55
	CLPT[15]	15.02	35.75	48.65	59.08	61.04	77.19
	Present	11.38	22.97	23.82	32.10	37.45	38.22

表 5 四层正方形层合板无量纲固有频率 ($h=0.06$)

Four-ply	Boundary conditions	Mode					
		1	2	3	4	5	6
(0°, 0°, 0°, 0°)	SSSS	15.28	33.51	44.74	61.10	65.02	90.76
	CCCC	29.36	51.27	67.85	86.34	87.92	119.45
(15°, -15°, -15°, 15°)	SSSS	15.61	34.59	44.27	62.27	66.87	92.25
	CCCC	29.27	52.19	66.59	86.69	89.95	121.80
(30°, -30°, -30°, 30°)	SSSS	16.26	37.16	42.88	64.59	71.93	86.54
	CCCC	29.09	54.76	63.30	87.75	95.62	115.34
(45°, -45°, -45°, 45°)	SSSS	16.58	39.33	41.29	65.75	78.78	78.34
	CCCC	29.00	57.67	60.02	88.32	104.18	105.30

表 6 五层正方形层合板无量纲固有频率 ($h=0.06$)

Five-ply	Boundary conditions	Mode					
		1	2	3	4	5	6
(0°, 0°, 0°, 0°, 0°)	SSSS	15.27	33.49	44.73	61.06	64.97	90.70
	CCCC	29.34	51.24	67.82	86.29	87.85	119.37
(15°, -15°, 15°, -15°, 15°)	SSSS	15.62	34.59	44.26	62.33	66.79	92.22
	CCCC	29.26	52.17	66.57	86.79	89.81	121.85
(30°, -30°, 30°, -30°, 30°)	SSSS	16.28	37.24	42.86	64.81	71.84	86.52
	CCCC	29.10	54.82	63.27	87.98	95.49	115.30
(45°, -45°, 45°, -45°, 45°)	SSSS	16.60	39.58	41.11	66.04	78.83	79.18
	CCCC	29.01	57.96	59.78	88.60	104.22	105.11

3 实验验证

以 $[0^{\circ}]_{16}$ 铺设层合板为例,其性能参数:边长为 $a=b=0.28\text{ m}$,厚度 $h=0.002\text{ m}$,密度 $\rho=1760\text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E_1=45\text{ Gpa}$, $E_2=12.9\text{ Gpa}$,剪切模量 $G_{12}=4.6\text{ Gpa}$,泊松比 $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.28$ 。在实验中,T 300 层合板被固定在实验台架上,用B&K 4808 力锤敲击激励点,用B&K 4374 加速度计传感器测量频率响应函数,传感器放置于 $0.25 \times a$, $0.75 \times b$ 。图3为所测得的频率响应函数,表7为数值模拟理论值与实验测量值的对比。从表7中可看出,测得的固有频率与数值计算结果吻合较好。用力锤均匀敲击层合板上各

点,图4为激励不同点测的前3阶振型图,振型图所表现的趋势与图2中理论计算图形基本吻合。

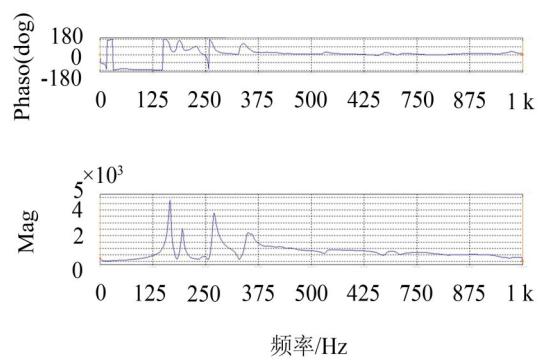


图 3 实验所得频率响应函数图

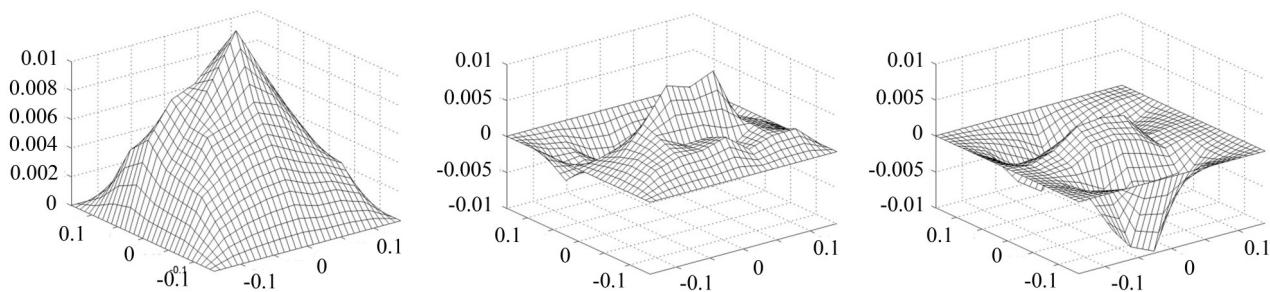


图4 前三节振型图

4 结语

(1) 采用分层理论结合有限元方法分析了层合板结构固有频率和振型。从理论分析可知:利用分层理论结合有限元的方法计算得到固有频率的准确性方面优于经典层合板理论,同时有限元分层理论适用于各种不同的边界条件;

(2) 着重讨论了层合板铺设角度、铺设层数、板厚度等结构参数对层合板固有频率的影响,得出铺设角度,对层合板固有频率的影响较大;

(3) 对16层板结构的固有频率和振型进行了分析并进行实验验证,实验结果与理论值相吻合。

表7 实验T 300层合板固有频率

Mode\Result	Simulation result	Experimental result	Error (%)
1	158.18	165.11	4.38
2	199.91	194.12	2.89
3	284.09	269.77	5.04
4	362.19	345.70	4.55

参考文献:

- [1] 赵美英,陶梅贞.复合材料结构力学与结构设计[M].西安:西北工业大学出版社,2007.
- [2] 崔海坡,温卫东.复合材料层合板冲击损伤影响因素分析[J].中国机械工程,2008,19(5): 613-617.
- [3] Omer C K. Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008, 44 (12): 725-731.
- [4] Pervez T, Seibi A C, Al-Jahwari F K S. Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory[J]. *Composite Structures*, 2005, 71 (3): 414-422.
- [5] Rastgaar A M, Mahinfaah M, Nakhaie J G. Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory[J]. *Composite Structures*, 2006, 72 (3): 273-279.
- [6] Pandya B N, Kant T. Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates- Finite element evaluations[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1988, 24 (12): 1267-1286.
- [7] Touratier M. An efficient standard plate theory [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1991, 29(8): 901-916.
- [8] Soldatos K P. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates [J]. *Acta Mechanica*, 1992, 94(3): 195-220.
- [9] 王旌生,吴有生.粘弹性复合材料结构水中振动及声辐射研究进展综[J].船舶力学,2007,11(5): 804-811.
- [10] 沈惠申.板壳后屈曲行为[M].上海:上海科学技术出版社,2002, 10. 1-26.
- [11] Reddy J N. Theories and computational models for composite laminate[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, 47(6): 147-169; 131-136.
- [12] WANG Xu-cheng. Finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 131-136.
- [13] Reddy J N. Mechanics of laminated composite plates and shells[M]. New York: CRS Press, 2004: 96-97.
- [14] Whitney J M. Structural analysis of laminated anisotropic plates[M]. Pennsylvania: Technomic Publishing Company Inc, 1987.
- [15] DAI K Y, LIU G R, LIM M K, et al. A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269(3): 633-652.