

文章编号: 1006-1355(2014)01-0044-03

不确定性拉索非线性随机振动的最优控制

张 巍¹, 应祖光², 胡荣春²

(1. 浙江理工大学 经济管理学院实验中心, 杭州 310018;

2. 浙江大学 航空航天学院力学系, 杭州 310027)

摘 要: 为实施不确定性斜拉索非线性随机振动的最优控制, 建立受控拉索的横向非线性运动方程, 运用伽辽金法推导多模态耦合的振动方程。同时, 考虑系统的不确定参数, 建立不确定性系统的随机最优控制问题。随后, 应用随机平均法、微分对策理论与动态规划方法确定 HJI 方程并得到极大极小控制律, 最后通过数值结果说明该最优控制对于斜拉索非线性随机振动能够达到较好控制效果。

关键词: 振动与波; 最优控制; 不确定性; 非线性随机振动; 拉索

中图分类号: TB52; O32; TU311

文献标识码: A

DOI 编码: 10.3969/j.issn.1006-1355.2014.01.011

Optimal Control of Nonlinear Random Vibration of an Inclined Taut Cable with Uncertainties

ZHANG Wei¹, YING Zu-guang², HU Rong-chun²

(1. Laboratory Center, School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Department of Mechanics, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract : The optimal control of nonlinear random vibration of an inclined taut cable with uncertainties is studied. The nonlinear equation for transverse motion of the controlled cable is derived, and then converted into the vibration equations with multi-mode coupling by using Galerkin method. Considering the uncertainty parameters, the random optimal control model of the uncertainty system is established. Then the HJI equation is determined and the minimum and maximum control laws are obtained based on the random averaging method, differential game theory and dynamical programming principle. Numerical results show that the proposed optimal control method has a good effectiveness for the nonlinear random vibration control of the cable.

Key words : vibration and wave ; optimal control ; uncertainty ; nonlinear random vibration ; cable

拉索是斜拉桥、大跨度支撑结构等的重要构件^[1], 但因抗弯和抗压刚度低而易于受环境激励产生大幅振动, 需要进行非线性振动控制研究。拉索确定性振动的主动和半主动控制已有一定研究^[2-5]。然而, 环境激励通常具有随机性, 斜拉索随机振动的最优控制研究相对缺乏^[6]; 而且, 实际拉索结构的不确定性在所难免, 模型系统因此包含不确定参数。系统的不确定性将退化按确定性设计的

控制效果, 由此, 考虑不确定性斜拉索随机振动的最优控制尚有待于研究。

微分对策理论是解决不确定性系统振动最优控制的一个有效方法, 它将该问题归结为最坏系统的最优控制, 即极大极小控制^[7]。本文建立受控斜拉索的横向非线性运动方程, 运用伽辽金法推导多模态耦合的振动方程; 然后考虑系统参数的不确定性与随机激励。先后应用随机平均法、微分对策理论与动态规划方法确定极大极小控制律; 最后通过数值结果说明控制效果。

1 受控斜拉索的非线性振动方程

考虑两端固定张紧的斜拉索^[5], 在铅直平面内

收稿日期: 2013-05-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072215)

作者简介: 张 巍(1965-), 女, 江苏南通人, 高级工程师, 学士, 主要从事信息系统与控制研究。

E-mail: zhweihz@zstu.edu.cn

横向激励下的振动,受控弹性索的横向运动方程为^[1]

$$m\ddot{v} + c_v \dot{v} = (T + EA\varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{dT}{ds} \frac{\partial v}{\partial s} + EA\varepsilon \frac{d^2 n}{ds^2} + f_v \quad (1)$$

式中 v 是横向位移, m 是单位长度质量, c_v 是阻尼系数, T 是静张力, EA 是拉伸刚度, ε 是非线性动应变^[4], s 是曲线坐标, n 是单位法向矢量, f_v 包含横向激励和控制力。其边界条件为 $s=0, L$ (索长) 时, $v=0$ 。利用非线性应变与张力表达式、静平衡关系, 并作无量纲化, 式(1)成为

$$\ddot{w} + c\dot{w} - \{k_1 - k_2 z + \int_0^1 [k_3 w + k_5 (\frac{\partial w}{\partial z})^2] dz\} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial z} + \int_0^1 [k_4 w + \frac{1}{2} k_3 (\frac{\partial w}{\partial z})^2] dz = f \quad (2)$$

相应边界条件为 $z=0, 1$ 时, $w=0$, 其中无量纲位移 $w = v/L$, 坐标 $z = s/L$, 斜拉索的倾斜角为 α , 水平静张力为 T_x , $c = c_v/m$, $f = f_v/(mL)$

$$k_1 = \frac{T_x}{mL^2 \sin \alpha} + \frac{k_2}{2}, \quad k_2 = \frac{g \cos \alpha}{L \sin^2 \alpha} \\ k_3 = \frac{EA g}{T_x L}, \quad k_4 = \frac{EA}{m} \left(\frac{mg}{T_x} \right)^2, \quad k_5 = \frac{EA}{2mL^2} \quad (3)$$

将位移展成

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \sin k\pi z \quad (4)$$

它满足索两端边界条件, 其中 q_k 为模态位移。考虑到索的模态振动幅值随模态阶次升高而迅速降低, 保留到前三阶模态。将式(4)代入(2), 运用伽辽金法, 可得索的模态振动方程

$$\ddot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 + [\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2) + \frac{8}{\pi^2}k_4]q_1 + \frac{40}{9}k_2 q_2 + \frac{8}{3\pi^2}k_4 q_3 + 3\pi k_3 q_1^2 + \frac{2\pi}{3}k_3 q_1 q_3 + 4\pi k_3 q_2^2 + 9\pi k_3 q_3^2 + \frac{\pi^4}{2}k_5(q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_1 = \frac{4}{\pi}\xi + 2u \sin \pi z_c \quad (5)$$

$$\ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 + 4\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2)q_2 + \frac{40}{9}k_2 q_1 + \frac{312}{25}k_2 q_3 + 8\pi k_3 q_1 q_2 + \frac{8}{3}\pi k_3 q_2 q_3 + 2\pi^4 k_5 \cdot (q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_2 = 2u \sin 2\pi z_c \quad (6)$$

$$\ddot{q}_3 + c_3 \dot{q}_3 + [9\pi^2(k_1 + \frac{1}{2}k_2) + \frac{8}{9\pi^2}k_4]q_3 + \frac{312}{25}k_2 q_2 + \frac{8}{3\pi^2}k_4 q_1 + \frac{\pi}{3}k_3 q_1^2 + \frac{4\pi}{3}k_3 q_2^2 + 18\pi k_3 q_1 q_3 + 9\pi k_3 q_3^2 + \frac{9\pi^4}{2}k_5(q_1^2 + 4q_2^2 + 9q_3^2)q_3 = \frac{4}{3\pi}\xi + 2u \sin 3\pi z_c \quad (7)$$

式中 $c_i = 2z_i \omega_i$, z_i 是阻尼比, $\omega_i = i\pi \sqrt{k_1 + k_2/2}$, z_c 是控制力 u 的位置坐标, x 假定为高斯白噪声激励。

2 不确定系统的极大极小控制力

将式(5)~(7)表示成 Itô 微分状态方程

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \quad (8a)$$

$$dp_i = -[\frac{\partial H}{\partial q_i} + (c_i + \tilde{c}_i) \frac{\partial H}{\partial p_i} + \tilde{s}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} - \tilde{w}_i - u_i] dt + \sigma_{ik} dB_k(t) \quad (8b)$$

式中 $H = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/2 + U(q_1, q_2, q_3)$, p_i 是广义动量, U 是广义势, B_k 是单位 Wiener 过程, u_i 是相应于 q_i 的广义控制, $\sigma_{ik} \sigma_{jk} = 2D_k \delta_{ij}$, D_k 是激励强度, $d_{ij}=1$ ($i=j$)。 \tilde{c}_i , \tilde{s}_i , \tilde{w}_i 是系统的不确定参数, 具有一定的界, 即 $\tilde{c}_i \in [-c_i^0, c_i^0]$, $\tilde{s}_i \in [-s_i^0, s_i^0]$, $\tilde{w}_i \in [-w_i^0, w_i^0]$ 。应用随机平均法, 由式(8)得到

$$dH = \{\tilde{m}(H) + \langle u_i - \tilde{c}_i p_i - \tilde{s}_i \partial U / \partial q_i + \tilde{w}_i \rangle p_i > \} dt + \tilde{\sigma}(H) dB(t) \quad (9)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 是平均算符, \tilde{m} 是漂移系数, $\tilde{\sigma}$ 是扩散系数。系统控制的性能指标为

$$J(\tilde{c}_i, \tilde{s}_i, \tilde{w}_i, u_i) = E \left[\int_0^{t_f} \{g(H) + \langle u^T R u \rangle\} dt \right] \quad (10)$$

式中 $E[\cdot]$ 是期望算符, t_f 是控制的终时, $R = \text{diag}[R_1, R_2, R_3]$, $u = [u_1, u_2, u_3]^T$, $g(H) \geq 0$ 。根据微分对策理论与动态规划方法, 建立系统(9)和指标(10)的平稳 HJI 方程

$$\min_{u_i} \max_{\tilde{c}_i, \tilde{s}_i, \tilde{w}_i} \left\{ \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{d\lambda}{dH} + [\tilde{m} + \langle u_i - \tilde{c}_i p_i - \tilde{s}_i \frac{\partial U}{\partial q_i} + \tilde{w}_i \rangle p_i >] \lambda + g + \langle u^T R u \rangle \right\} = 0 \quad (11)$$

式中 λ 是 H 的函数。由此式左边可得最坏参数与最优控制

$$\tilde{c}_i^* = c_i^0 \text{sgn}(\lambda p_i^2), \quad \tilde{s}_i^* = s_i^0 \text{sgn}(\lambda p_i \partial U / \partial q_i) \\ \tilde{w}_i^* = -\tilde{w}_i^0 \text{sgn}(\lambda p_i), \quad u_i^* = -\lambda p_i / (2R_i) \quad (12)$$

将式(12)代入(11)求解之得到 λ , 代回(12)即得不确定系统的最优控制。应用随机平均法可计算系统(8)控制前后的响应。

3 数值结果

设某斜拉索的参数 $L=130.0$ m, $a=0.984$ rad, $A=60.0$ cm², $m=60.0$ kg/m, $E=180$ GPa, $T_x=4\ 000 \sin(a)$ kN, $z_i=5 \times 10^{-5}$, $D_1=D_2=D_3=0.01$, $z_c=0.9$, $R_i=4.0 \times \sin(i\pi z_c)$, $g=2\ H^2$, $c_i^0=0.1$, $s_i^0=0.3$, $w_i^0=0.1$, $w_3^0=w_2^0=0.05$ 。按照式(12)确定极大极小控制, 计算受控索的均方位移, 同时计算未控索的均方位移, 得到相对降低值。作为比较, 给出不计系统不确定性的最优控制均方位移的相对降低值。结果如图1所示, 可见考虑系统不确定性的极大极小控制效果更好, 能够改善实际控制效果。图2展示了受控与未控索响应的一个样本。

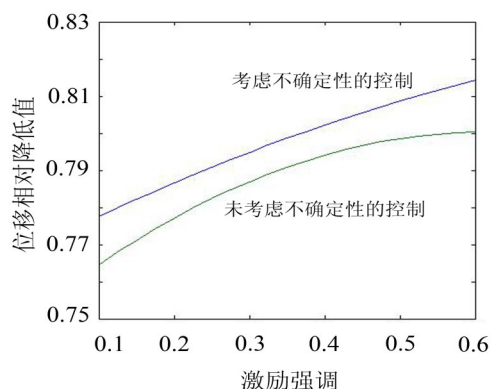


图1 均方位移的相对降低值

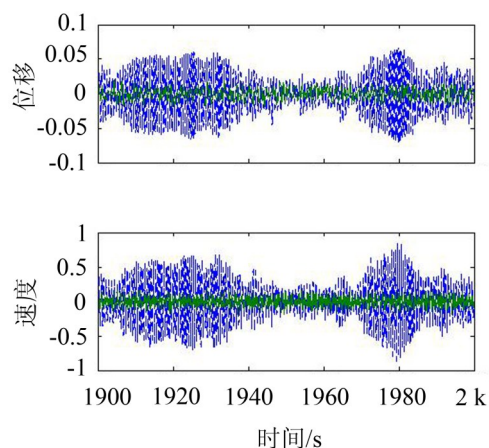


图2 响应样本(实线为受控值,虚线为未控值)

4 结语

本文综合应用随机平均法、微分对策理论与动

态规划原理研究了不确定性斜拉索非线性随机振动的最优控制问题。建立了受控拉索多模态耦合的横向非线性振动方程,应用随机平均法得到平均方程,应用微分对策理论与动态规划方法建立HJI方程,从而得到了不确定性系统的极大极小控制律。该考虑不确定性的非线性随机最优控制更切近实际情况,数值结果表明能达到更好的实际控制效果。

参考文献:

- [1] Irvine H M. Cable structures[M]. Cambridge: MIT Press; 1981.
- [2] Diouron T L, Fujino Y, Abe M. Control of wind-induced self-excited oscillations by transfer of internal energy to higher modes of vibration I: analysis in two degree of freedom [J]. *ASCE J. Eng. Mech.*, 2003, 129: 514-525.
- [3] ZHOU H J, XU Y L. Wind-rain-induced vibration and control of stay cables in a cable-stayed bridge [J]. *Struct. Cont. Health Moni.*, 2007, 14: 1013-1033.
- [4] YING Z G, NI Y Q, KO J M. Parametrically excited instability analysis of a semi-actively controlled cable [J]. *Eng. Struct.*, 2007, 29: 567-575.
- [5] 张巍, 应祖光, 王建文. 风激拉索张弛振荡的最优控制分析[J]. *噪声与振动控制*, 2012, 32(3): 21-24.
- [6] ZHAO M, ZHU W Q. Stochastic optimal semi-active control of stay cables by using magneto-rheological damper[J]. *J. Vib. Cont.*, 2011, 17: 1921-1929.
- [7] YING Z G. A minimax stochastic optimal control for bounded-uncertain systems[J]. *J. Vib. Cont.*, 2010, 16: 1591-1604.

(上接第43页)

影响。在径向偏离小于2.6 mm区域内,车体垂向平稳性曲线在整个速度过程中都能达到合格指标。

随着质心径向偏离的增加,同一速度下纵向蠕滑力不断增大,不同速度下偏离为24 mm时与无偏离时纵向蠕滑力比值在120 km/h达到顶值。在60~120 km/h范围内粘着系数随质心偏离的增大而减小,超过120 km/h后微观滑移加剧,粘着达到饱和极限,粘着系数基本保持不变,不再随质心偏离而变化;

(3) 轮对质心径向偏离会引起轮对纵向振动现象,还会影响到车体垂向平稳性指标,导致车辆出现安全隐患。

参考文献:

- [1] 马卫华. 轮对纵向振动及其相关动力学影响研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2007.
- [2] 罗世辉, 金鼎昌, 陈清. 轮对纵向振动与机车车辆相关问题研究[J]. *铁道学报*, 2005, 27(3): 26-34.

- [3] 姚远, 张红军, 罗赞, 金鼎昌. 机车传动系统扭转与轮对纵向耦合振动稳定性[J]. *交通运输工程学报*, 2009, 9(1): 17-20.
- [4] 马卫华, 罗世辉. 轨道不平顺对轮对纵向振动影响分析[J]. *铁道机车车辆*, 2005, 25(6): 16-20.
- [5] 吴磊, 硕乔, 学松, 李玲. 车轮多边形化对车辆运行安全性能的影响[J]. *交通运输工程学报*, 2011, 11(3): 47-54.
- [6] 周劲松, 李大光, 张祥韦, 沈钢. 平稳性快速算法及其在高速铁路车辆动力学分析中的运用[J]. *铁道学报*, 2008, 30(6): 36-39.
- [7] 任利惠, 谢纲, 伍智敏, 孙继武, 漆晖. 短波磨耗状态的轮轨纵向蠕滑力特性[J]. *交通运输工程学报*, 2011, 11(2): 24-31.
- [8] 任利惠, 谢纲. 简谐激励下轮轨非稳态滚动接触的蠕滑力特性[J]. *铁道学报*, 2012, 34(5): 32-34.
- [9] 郭战伟. 基于轮轨蠕滑最小化的钢轨打磨研究[J]. *中国铁道科学*, 2011, 30(6): 9-15.